

1	LIKSTRÖMSLÄRA	2
1.1	INTRODUKTION	2
1.2	OHMS LAG	3
1.2.1	<i>Schemasymboler</i>	3
1.3	SPÄNNINGSDELNINGSLAGEN	4
1.4	SERIE- OCH PARALLELLKOPPLING AV RESISTORER	6
1.5	STRÖMDELNING	7
1.6	KIRCHHOFFS STRÖMLAG	9
1.7	KIRCHHOFFS SPÄNNINGSLAG	10
1.8	JORDNING OCH BEGREPPEPOTENTIAL	11
1.9	SLINGANALYS	12
1.10	NODANALYS	14
1.11	D/Y- OCH Y/D-TRANSFORMATION	16
1.12	SUPERPOSITION	19
1.13	EKVIVALENTA TVÅPOLER OCH TVÅPOLSSATSEN	20
1.13	ELEKTRISK EFFEKT OCH ENERGI	23
1.14	EFFEKTANPASSNING	24
1.15	OLINJÄRA RESISTANSER	27
2	VÄXELSTRÖMSLÄRA	30
2.1	MATEMATISK BESKRIVNING AV VÄXELSPÄNNING OCH VÄXELSTRÖM	30
2.2	VISARDIAGRAM	33
2.3	EFFEKTIVVÄRDE	37
2.4	INDUKTANS, KAPACITANS OCH REAKTANS	38
2.5	SAMBAND MELLAN SPÄNNING OCH STRÖM	40
2.6	IMPEDANS	42
2.7	KOMPLEXA METODEN ($j\omega$ -METODEN)	45

1 Likströmlära

1.1 Introduktion

Inom elektrotekniken skiljer man på två typer av strömmar, *likström* och *växelström*. Likström kommer från bl.a. batterier (ficklampsbatterier, bilackumulatorer etc.) och växelström från vägguttag m.m. Av namnen framgår att likström är en ström som går åt samma håll hela tiden, medan växelström varierar och byter riktning regelbundet eller slumpmässigt. Från vägguttag i hushåll kommer växelströmmen regelbundet med en viss frekvens. Brus är exempel på växelström som ändrar riktning slumpmässigt och som exempelvis ger sig till känna i ljudanläggningar eller radiomottagare om antennkabeln råkar lossna från sitt uttag. I det här kapitlet skall endast likström behandlas.

En förutsättning för att ström skall kunna flyta, är att det råder *elektrisk spänning* (potentialskillnad) mellan två punkter i den elektriska kretsen. Om ett *motstånd* i form av t.ex. en glödlampa eller elmotor kopplas in mellan punkterna, flyter ström från den högre potentialen ”+” till den lägre ”-”. Strömstyrkan beror dels på hur hög spänningen är samt motståndets storlek.

Elektrisk ström förknippas med fria elektroner som rör sig i den elektriska kretsen. Lägg dock märke till att elektronernas rörelseriktning är motsatt strömriktningen. Av någon anledning upplever de flesta av oss det som enklare och mer naturligt att tänka sig strömmen gående från ”+” till ”-”. Enheten för elektrisk ström är *ampère*¹ och förkortas [A].

Som antydde tidigare, kan elektrisk spänning alstras på många olika sätt. Det kan ske elektromekaniskt som i generatorer där en spole får röra sig i ett magnetfält, kemiskt som i batterier och ackumulatorer eller optiskt som i solceller. Enheten för elektrisk spänning är *volt*² och förkortas [V].

Elektriskt motstånd förekommer i ett flertal olika former förutom de som tidigare nämndes. När vi talar om *resistans*, menar vi i första hand den renaste formen av motstånd som är konstant oavsett strömmens styrka och frekvens. I de kommande likströmsexemplen skall vi i huvudsak endast studera kretsar med sådana motstånd. Enheten för elektriskt motstånd är *ohm*³ och förkortas med den grekiska bokstaven [Ω].

Resistorer som ändrar värde vid olika strömstyrkor kallas olinjära resistorer. Vissa påverkas också av yttre faktorer såsom temperatur, ljus och mekanisk kraft etc. Dessa fenomen utnyttjas flitigt inom mättekniken för att omvandla icke elektriska storheter till elektriska signaler. Ofta får man förstärka mätsignalerna med hjälp av förstärkare eftersom de är så svaga. Därefter skickas de vidare till mätinstrument eller mätadorsystem för mätvärdespresentation.

¹ André-Marie Ampère (1775-1836), fransk matematiker och fysiker.

² Alessandro Antonio Volta (1745-1827), italiensk fysiker.

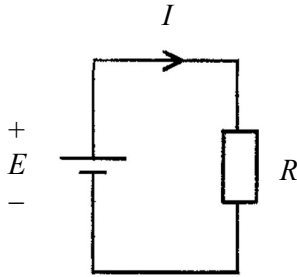
³ Georg Simon Ohm (1787-1854), tysk fysiker.

1.2 Ohms lag

Det mest centrala och viktigaste sambandet inom elektrotekniken, är *Ohms lag*.

$$U = R \cdot I \quad (1.1)$$

U står för spänning, R för resistans och I för ström. Ohms lag säger att proportionalitet råder mellan spänning och ström om resistansen är konstant. Många av elektroteknikens övriga samband kan härledas med hjälp av denna enkla lag.



Figur 1.1 Resistans R ansluten till en spänningskälla E . I den slutna kretsen flyter strömmen I .

E är beteckningen för *emk* som står för *elektromotorisk kraft*. Elektrisk spänning kan alltså både betecknas med E och U . Beteckningen E används i samband med spänningskällor medan U används lite mer godtyckligt för att exempelvis markera en spänning över ett motstånd. Som nämntes tidigare, flyter den elektriska strömmen från ”+” till ”-”. Det betyder att det långa blecket på schemasymbolen för spänningskällan i figur 1.1 är dess pluspol och det korta blecket minuspolen.

Exempel 1.1:

Beräkna strömmen i figur 1.1 om $E = 1,5 \text{ V}$ och $R = 150 \Omega$.

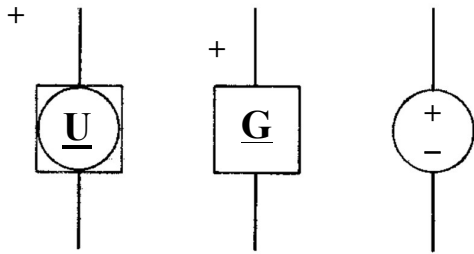
Lösning:

$$\text{Ohms lag: } E = R \cdot I \Rightarrow I = \frac{E}{R} \Rightarrow I = \frac{1,5}{150} = 0,010 \text{ A}$$

Svar: Strömmen blir 10 mA

1.2.1 Schemasymboler

När kopplingscheman ritas upp används schemasymboler. Dessa kan ha olika utseende beroende på vem som ritat dem. De symboler som användes i figur 1.1 är ganska vanliga eftersom de är så enkla att rita. I figur 1.2 a) och b) visas ytterligare några exempel på hur spänningskällor respektive resistorer kan ritas.



Figur 1.2 a) Alternativa schemasymboler för spänningskälla.



Figur 1.2 b) Alternativa schemasymboler för resistans.

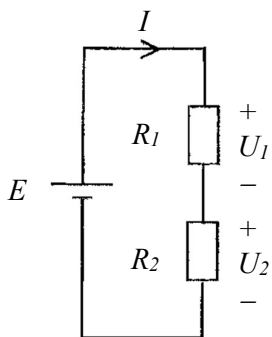


Figur 1.2 c) Olika schemasymboler för strömkälla.

Strömkällor kommer att förekomma senare i kapitlet. De fungerar som strömgeneratorer och avger konstant ström oavsett hur de belastas. Till skillnad från spänningskällor i form av exempelvis batterier, så kan inte dessa köpas i vilken affär som helst. Inom vissa gränser är det möjligt att tillverka strömkällor med hjälp av elektronik där transistorn spelar en väsentlig roll.

1.3 Spänningsdelningslagen

Om två resistorer *seriekopplas* och ansluts till en spänningskälla, delar spänningen upp sig mellan de två resistorerna. Fenomenet kallas *spänningsdelning*.



Figur 1.3 Spänningen E delar upp sig i delspänningarna U_1 och U_2 .

Strömmen I är densamma genom de två resistorerna i figur 1.3. Det innebär i det här fallet att man med Ohms lag kan teckna strömmen på tre olika sätt:

$$I = \frac{U_1}{R_1} \quad , \quad I = \frac{U_2}{R_2} \quad \text{eller} \quad I = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad .$$

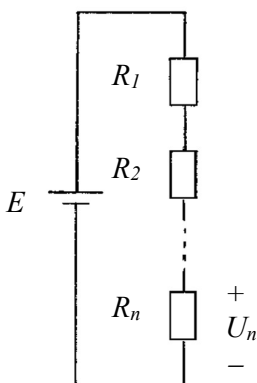
Om det första och sista uttrycket sätts samman erhålles

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad \Leftrightarrow \quad U_1 = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

och då andra och sista uttrycket sätts samman erhålles på samma sätt

$$\frac{U_2}{R_2} = \frac{E}{R_1 + R_2} \quad \Leftrightarrow \quad U_2 = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Vi ser att de två uttrycken i stort sett ser likadana ut, med den skillnaden att det står R_1 i täljaren då U_1 skall beräknas och R_2 då U_2 skall beräknas. Detta kan generaliseras till att gälla en spänningsdelarkoppling med ett godtyckligt antal resistorer.



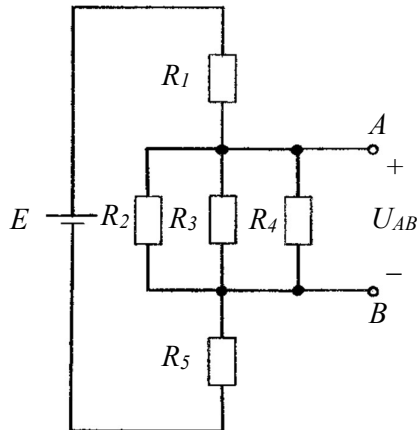
Figur 1.4 En spänningsdelarkoppling med n st. resistorer.

Det generella uttrycket för kopplingen i figur 1.4, kallas *spänningsdelningslagen* och lyder:

$$U_n = E \cdot \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} \quad (1.2)$$

Exempel 1.2:

Beräkna spänningen U_{AB} mellan uttagspunkterna A och B i kopplingen nedan.



$$\begin{aligned} E &= 10 \text{ V} \\ R_1 &= 500 \Omega \\ R_2 &= 4 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 6 \text{ k}\Omega \\ R_4 &= 12 \text{ k}\Omega \\ R_5 &= 7,5 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Lösning:

Spänningsdelningslagen ger: $U_{AB} = E \cdot \frac{R_{AB}}{R_1 + R_{AB} + R_5}$ där $\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$.

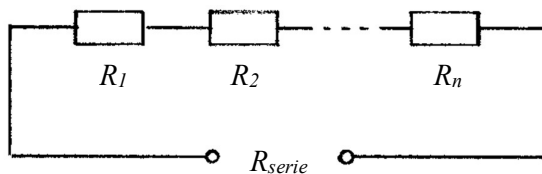
$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{4000} + \frac{1}{6000} + \frac{1}{12000} \quad \Rightarrow \quad R_{AB} = 2 \text{ k}\Omega$$

$$\text{Alltså } U_{AB} = 10 \cdot \frac{2000}{500+2000+7500} = 2 \text{ V}$$

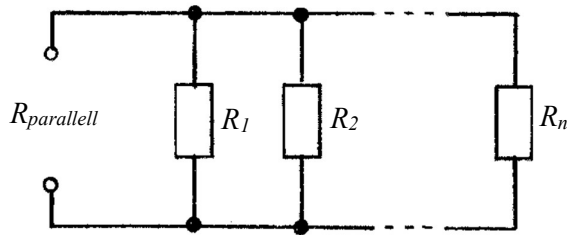
Svar: Spänningen U_{AB} mellan uttagspunkterna A och B blir 2 V

1.4 Serie- och parallellkoppling av resistorer

I exempel 1.2 förekommer både serie- och parallellkoppling av resistorer. Klumpen i mitten, den som består av de tre parallellkopplade resistorerna R_2 , R_3 och R_4 , har kallats R_{AB} . R_1 är seriekopplad med R_{AB} som i sin tur är seriekopplad med R_5 .



Figur 1.5 a) Seriekopplade resistorer.



Figur 1.5 b) Parallellkopplade resistorer.

För att beräkna resistansen i figur 1.5 a adderar vi bara de seriekopplade resistorerna medan resistansen i figur 1.5 b beräknas genom att addera de inverterade värdena av de parallellkopplade resistorerna.

$$R_{serie} = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{R_{parallell}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (1.4)$$

Det inverterade värdet av resistans kallas *konduktans* och brukar betecknas G . Formel (1.4) kan därför också uttryckas

$$G_{parallell} = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad (1.5)$$

Enheten för konduktans är $[\Omega^{-1}]$ eller *siemens*⁴ som förkortas [S]. En annan enhet som förekommer är [mho] där ordet "ohm" kastats om.

Specialfallet då *endast två* resistorer är parallellkopplade är mycket vanligt. Då brukar en snabbformel användas.

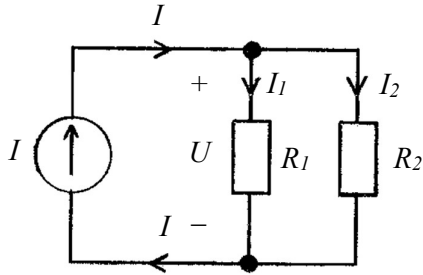
Formel (1.4) ger:
$$\frac{1}{R_{parallell}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_{parallell} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

Enligt snabbformeln är resistansen lika med *produkten genom summan* men tänk på att den endast gäller vid parallellkoppling av två resistorer.

1.5 Strömdelning

Precis som det finns en spänningsdelningslag så finns det också en *strömdelningslag*. Vid härledning av denna, utgår man från två parallellkopplade resistorer där en ström tillförs och delar upp sig mellan dem.

⁴ Enheten är uppkallad efter de två tyska uppfinnarna och ingenjörerna Ernst Werner Siemens (1816-1892) samt Wilhelm Siemens (1823-1883).



Figur 1.6 Strömdelare bestående av R_1 och R_2 .

Eftersom R_1 och R_2 är parallellkopplade i figur 1.6, blir spänningen densamma över dem. Det innebär att spänningen kan tecknas med Ohms lag på tre olika sätt:

$$U = R_1 \cdot I_1 \quad , \quad U = R_2 \cdot I_2 \quad \text{eller} \quad U = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

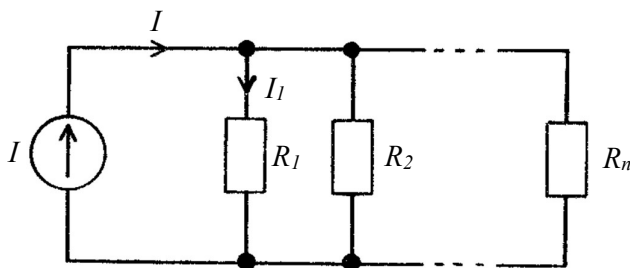
Om det första och sista uttrycket sätts samman erhålles

$$R_1 \cdot I_1 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot I$$

och då andra och sista uttrycket sätts samman erhålles på samma sätt

$$R_2 \cdot I_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \cdot I \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot I$$

Vi ser att de två uttrycken i stort sett ser likadana ut, med den skillnaden att det står R_2 i täljaren då I_1 skall beräknas och R_1 då I_2 skall beräknas. Detta kan generaliseras till att gälla en strömdelarkoppling med ett godtyckligt antal resistorer.



Figur 1.7 Strömdelarkoppling med n stycken resistorer.

Det generella uttrycket för kopplingen i figur 1.7, kallas *strömdelningslagen* och lyder:

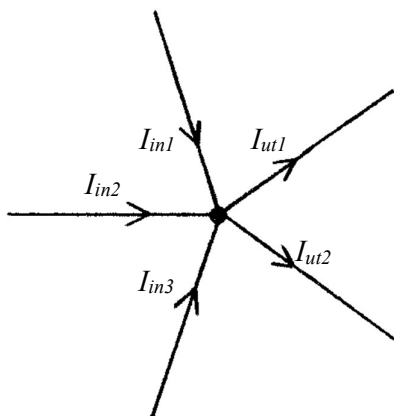
$$I_1 = \frac{R}{R_1 + R} \cdot I \quad (1.6)$$

där $R = R_2 // R_3 // \dots // R_n$

Tecknet ”//” betyder *parallellt med* och innebär att R beräknas enligt parallellkopplingslagen, formel (1.4).

1.6 Kirchhoffs strömlag

I figur 1.6 ser vi att strömmen I delar upp sig i delströmmarna I_1 och I_2 , dvs. I är lika med summan av I_1 och I_2 . Detta kallas *Kirchhoffs⁵ första lag* eller *Kirchhoffs strömlag* och kan generaliseras till att gälla ett godtyckligt antal strömmar som flyter till och från en knutpunkt.



Figur 1.8 Knutpunkt med flera inkommande och utgående strömmar.

För knutpunkten i figur 1.8 skulle vi kunna tillämpa den generella formuleringen av Kirchhoffs strömlag som lyder:

$$\sum \text{alla inkommande strömmar} = \sum \text{alla utgående strömmar}$$

eller

$$\sum \text{alla inkommande strömmar} - \sum \text{alla utgående strömmar} = 0 \quad (1.7)$$

Samband (1.7) ger därmed att

$$I_{in1} + I_{in2} + I_{in3} - I_{ut1} - I_{ut2} = 0$$

⁵ Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887), tysk fysiker.

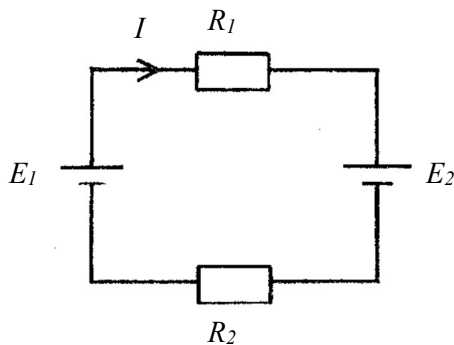
1.7 Kirchhoffs spänningslag

Kirchhoffs andra lag eller Kirchhoffs spänningslag som den också kallas, kan formuleras enligt följande:

$$\sum \text{alla spänningsändringar i en sluten krets} = 0 \quad (1.8)$$

Exempel 1.3:

Beräkna strömmen I i kretsen nedan.



$$E_1 = 50 \text{ V}$$

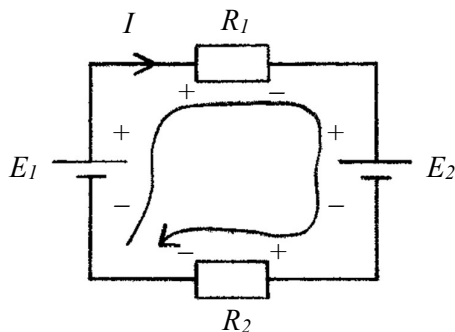
$$E_2 = 20 \text{ V}$$

$$R_1 = 4 \Omega$$

$$R_2 = 2 \Omega$$

Lösning:

I kretsen ritas en s.k. slinga in för att beskriva hur man har tänkt sig att vandra då spänningsändringarna summeras. Hur denna slinga ritas in, är en smaksak. Om slingan ritas åt samma håll som strömmen, erhålles *spänningsfall* varje gång en resistor passeras.



Kirchhoffs spänningslag, formel (1.8) ger:

$$+E_1 - R_1 \cdot I - E_2 - R_2 \cdot I = 0 \quad \Rightarrow \quad I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{50 - 20}{4 + 2} = 5 \text{ A}$$

Svar: Strömmen $I = 5 \text{ A}$

Om vi hade fått ett negativt värde på strömmen i exempel 1.3, hade det inneburit att den flutit i motsatt riktning, dvs. moturs.

1.8 Jordning och begreppet potential

I en elektrisk krets kan en eller flera punkter vara *jordade* vilket i kopplingsscheman markeras med en speciell jordningssymbol.

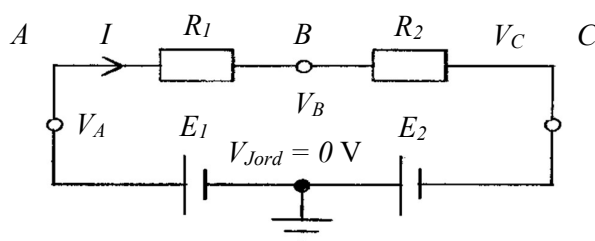


Figur 1.9 Olika typer av jordningssymboler.

I praktiken innebär detta att dessa punkter är elektriskt ihopkopplade. De utgör referenspunkter i kretsen där *potentialen* är 0 V. För att bestämma de övriga punkternas potential, eller spänningspotential som det också kallas, tänker man sig att spänningen mäts mellan respektive punkt och jord med en voltmeter. Voltmeters minussladd kopplas till jord och genom att ansluta dess plussladd till olika punkter i kretsen, kan man direkt avläsa deras spänningspotential. I svensk litteratur brukar spänningspotential betecknas med bokstaven *V*. Vid angivande av dess värde, anges alltid tecken även om potentialen är positiv, t.ex. + 5 V, + 15 V eller – 15 V.

Exempel 1.4:

Bestäm potentialerna i punkterna *A*, *B* och *C*.



$$\begin{aligned} E_1 &= 4,5 \text{ V} \\ E_2 &= 1,5 \text{ V} \\ R_1 &= 3,0 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 3,0 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Lösning:

I punkterna *A* och *C* är det uppenbart att potentialerna blir $V_A = + E_1$ resp. $V_C = - E_2$ dvs. $V_A = + 4,5 \text{ V}$ och $V_C = - 1,5 \text{ V}$. För att bestämma V_B måste spänningsfallet över R_1 subtraheras från V_A och då måste först strömmen i kretsen beräknas.

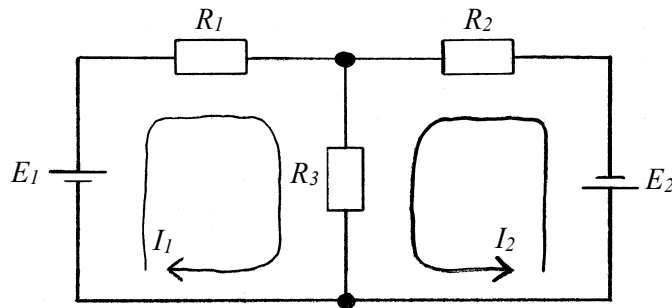
$$I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow I = \frac{4,5 + 1,5}{3,0 \cdot 10^3 + 3,0 \cdot 10^3} = 1,0 \text{ mA}$$

$$V_B = +E_1 - R_1 \cdot I \Rightarrow V_B = +4,5 - 3,0 \cdot 10^3 \cdot 1,0 \cdot 10^{-3} = +1,5 \text{ V}$$

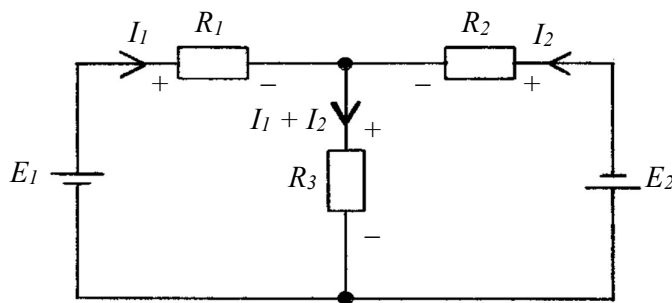
Svar: Potentialerna i punkterna *A*, *B* och *C* är + 4,5 V, + 1,5 V respektive – 1,5 V.

1.9 Slinganalys

Vid användande av *slinganalys*, tänker man sig att den elektriska kretsen består av ett antal *maskor*. I varje maska ritas en *slinga* in, med en viss bestämd riktning. Slingan betraktas som en cirkulerande ström i maskan och kallas därför ofta även *slingström*.



Figur 1.10 a) Slingströmmar inritade i maskorna av en elektrisk krets.

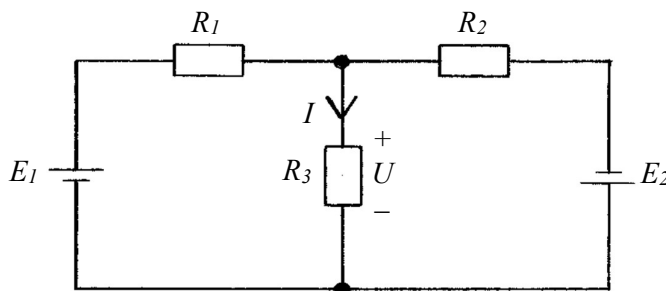


Figur 1.10 b) Elektriska kretsen med grenströmmar inritade och spänningsfall markerade.

I figur 1.10 b) framgår hur man med hjälp av slingströmmarna i figur 1.10 a) kan uttrycka de olika *grenströmmarna* i kretsen. Grenströmmen genom R_3 ges också av Kirchhoffs strömlag.

Exempel 1.5:

Bestäm strömmen I och spänningen U .



$$\begin{aligned} E_1 &= 1,5 \text{ V} \\ E_2 &= 9,0 \text{ V} \\ R_1 &= 1,0 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 2,0 \text{ k}\Omega \\ R_3 &= 3,0 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Lösning:

Av figur 1.10 framgår att strömmen I är summan av I_1 och I_2 . Spänningen U kan erhållas med hjälp av Ohms lag.

För att bestämma I beräknar vi först I_1 och I_2 med ett ekvationssystem som ges av Kirchhoffs spänningslag för respektive slinga:

$$\text{Vänstra slingan} \Rightarrow +E_1 - R_1 I_1 - R_3(I_1 + I_2) = 0$$

$$\text{Högra slingan} \Rightarrow -E_2 - R_2 I_2 - R_3(I_1 + I_2) = 0$$

$$\text{Numeriskt} \Rightarrow +1,5 - 1000I_1 - 3000(I_1 + I_2) = 0$$

$$-9,0 - 2000I_2 - 3000(I_1 + I_2) = 0$$

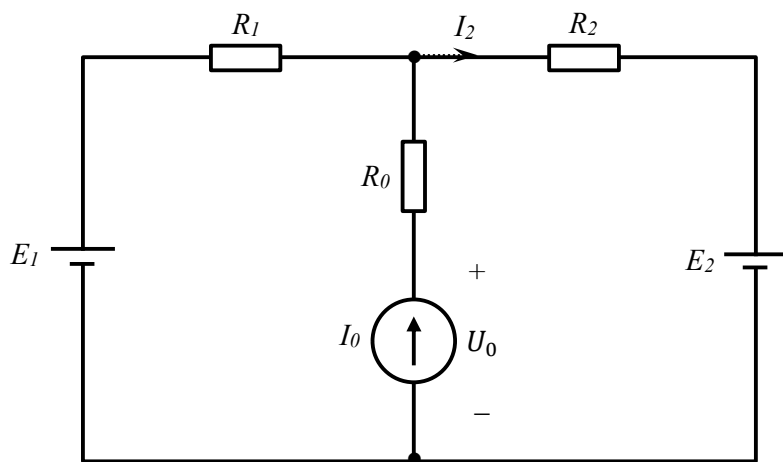
Vi får: $I_1 \approx 3,14 \text{ mA}$ och $I_2 \approx -3,68 \text{ mA} \Rightarrow I = I_1 + I_2 \approx -0,54 \text{ mA} \Rightarrow U = R_3 \cdot I \approx -1,6 \text{ V}$.

Svar: Den sökta strömmen och spänningen blir $-0,54 \text{ mA}$ respektive $-1,6 \text{ V}$.

I exempel 1.5 förekom endast spänningskällor och resistorer. Om en given krets även innehåller strömkällor måste man se upp vid användande av slinganalys. Det är lätt att glömma bort att strömkällan även genererar en spänning. Initialt är den spänningen okänd men kan naturligtvis beräknas i efterhand då andra strömmar och spänningar blivit kända i kretsen. Låt oss studera detta i ett exempel.

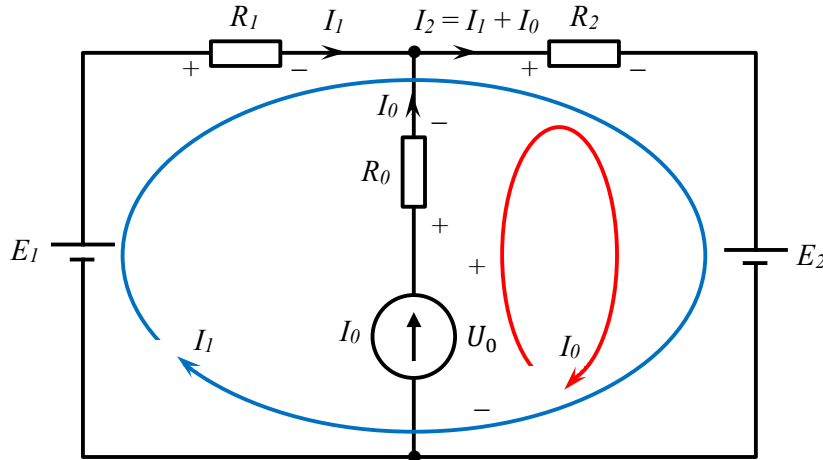
Exempel 1.6:

Beräkna strömmen I_2 i kretsen samt spänningen U_0 som genereras av strömkällan.



$$\begin{aligned} I_0 &= 2,0 \text{ mA} \\ E_1 &= 1,5 \text{ V} \\ E_2 &= 9,0 \text{ V} \\ R_0 &= 3,9 \text{ k}\Omega \\ R_1 &= 1,5 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 1,0 \text{ k}\Omega \end{aligned}$$

Lösning:



Med slingströmmarna inritade så som visas i figuren ovan får man ekvationssystemet:

$$+E_1 - R_1 I_1 - R_2 (I_1 + I_0) - E_2 = 0 \quad \dots (1)$$

$$+U_0 - R_0 I_0 - R_2 (I_1 + I_0) - E_2 = 0 \quad \dots (2)$$

Vid tecknande av ekvation (1) följer man alltså slingströmmen I_1 och summerar ihop spänningsfallen. Ekvation (2) fås genom att följa slingströmmen I_0 .

Med de givna komponentvärdena får ekvationssystemet lösningen:

$$I_1 = -3,8 \text{ mA och } U_0 = 15 \text{ V.}$$

$$I_2 = I_0 + I_1 = -1,8 \text{ mA}$$

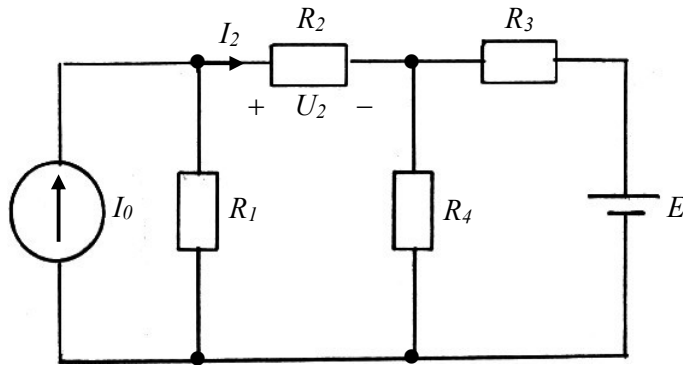
Svar: Strömmen $I_2 = -1,8 \text{ mA}$ och spänningen $U_0 = 15 \text{ V}$.

1.10 Nodanalys

Vid användande av *nodanalys* som lösningsmetod skall, i likhet med slinganalys, också ett ekvationssystem ställas upp. Varje *nod*, utom den man valt att jorda, leder fram till en ekvation. Med nod menas här ett ställe där fler än två komponenter är ihopkopplade. I anslutning till noderna, utom den som jordats, införs potentialbeteckningar och grenströmmar. Med hjälp av Kirchhoffs strömlag för grenströmmarna, ställs ekvationssystemet upp. De okända grenströmmarna uttrycks med hjälp av införda potentialbeteckningar och Ohms lag. Metoden belyses bäst med ett exempel.

Exempel 1.7:

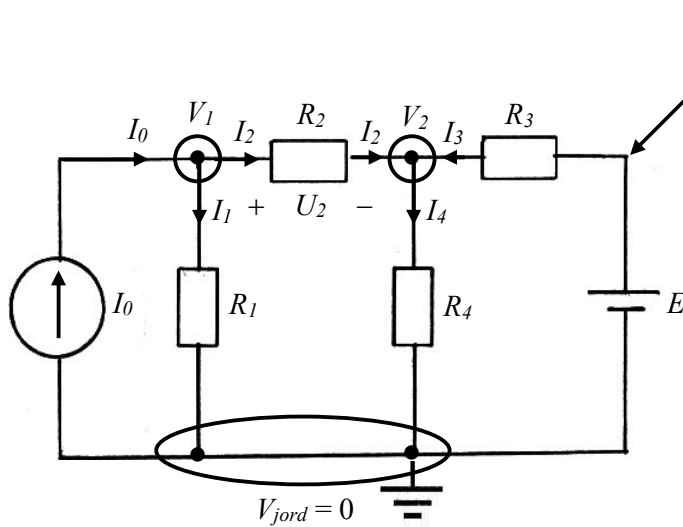
Beräkna strömmen I_2 och spänningen U_2 i kretsen.



- $I_0 = 1 \text{ A}$
- $U = 1 \text{ V}$
- $R_1 = 1 \Omega$
- $R_2 = 1 \Omega$
- $R_3 = 1 \Omega$
- $R_4 = 1 \Omega$

Lösning:

En nod skall jordas, i de övriga införs potentialbeteckningar och grenströmmar. I figuren har kretsens tre noder ringats in.



Räknas ej som nod eftersom endast två komponenter är ihopkopplade här. Potentialen i punkten är $+E$ dvs. $+1 \text{ V}$.

Vilken nod som jordas och vilka riktningar som väljs på grenströmmarna är godtyckligt. Ekvationssystemet tecknas med utgångspunkt från de val man gjort och leder alltid till samma resultat. Den enda ström som har given riktning i det här exemplet är I_0 som kommer från strömkällan.

Kirchhoffs strömlag för respektive nod ger ekvationssystemet:

$$I_0 - I_1 - I_2 = 0 \quad \dots (1)$$

$$I_2 + I_3 - I_4 = 0 \quad \dots (2)$$

I_0 är given och är 1 A . De övriga strömmarna uttrycks med hjälp av potentialbeteckningarna och Ohms lag, varvid ekvationssystemet får följande utseende:

$$I_0 - \frac{V_1 - V_{jord}}{R_1} - \frac{V_1 - V_2}{R_2} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{V_1 - V_2}{R_2} + \frac{E - V_2}{R_3} - \frac{V_2 - V_{jord}}{R_4} = 0 \quad \dots (2)$$

Med insatta värden fås:

$$1 - \frac{V_1 - 0}{1} - \frac{V_1 - V_2}{1} = 0 \quad \dots (1)$$

$$\frac{V_1 - V_2}{1} + \frac{+1 - V_2}{1} - \frac{V_2 - 0}{1} = 0 \quad \dots (2)$$

Ekvationssystemets lösning blir: $V_1 = +0,8$ V och $V_2 = +0,6$ V.

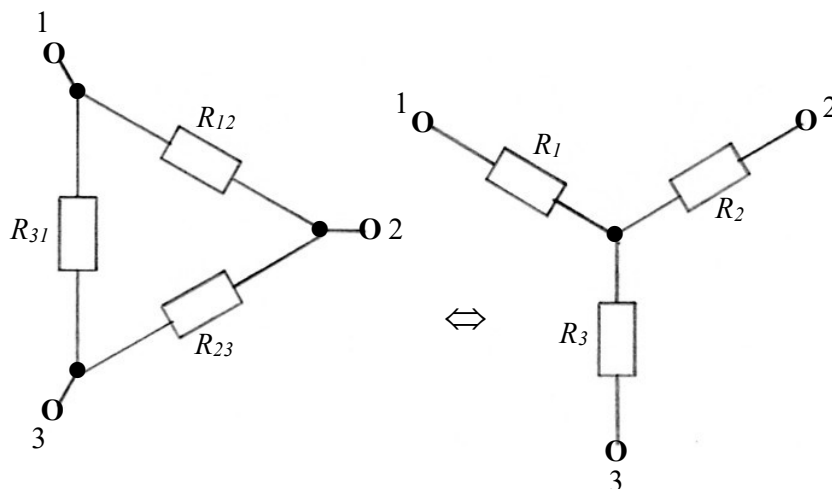
$$U_2 = V_1 - V_2 = 0,2 \text{ V och } I_2 = U_2/R_2 = 0,2 \text{ A.}$$

Svar:

Den sökta spänningen och strömmen blir 0,2 V resp. 0,2 A.

1.11 D/Y- och Y/D-transformation

Ibland kan kretsar upplevas som röriga och svåra att utföra beräkningar på. Ett sätt att underlätta beräkningsarbetet kan vara att förenkla kretsen med s.k. *D/Y-transformation*. En D-kopplad del av kretsen ersätts med en ekvivalent Y-koppling⁶.



Figur 1.12 D/Y-transformation. Med rätt valda resistansvärden kan D- och Y-kopplingen sägas vara ekvivalenta.

⁶ D-koppling kallas även Δ -koppling (deltakoppling) eller triangelkoppling medan Y-kopplingen även fått namnet stjärnkoppling.

Villkoret för ekvivalensen i figur 1.12 är att resistansen mellan två anslutningspunkter i Y-kopplingen är densamma som resistansen mellan motsvarande anslutningspunkter i D-kopplingen. Vi ser att

$$R_1 + R_2 = R_{12} // (R_{23} + R_{31})$$

$$R_2 + R_3 = R_{23} // (R_{12} + R_{31})$$

$$R_3 + R_1 = R_{31} // (R_{12} + R_{23})$$

eller

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot (R_{23} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot (R_{12} + R_{31})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

$$R_3 + R_1 = \frac{R_{31} \cdot (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Av detta följer:

$$R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.9 \text{ a})$$

$$R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.9 \text{ b})$$

$$R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} \quad (1.9 \text{ c})$$

Formlerna är ganska lätta att lägga på minnet. För att få fram R_1 kollar man vilka av D-kopplingens resistanser som är kopplade till anslutningspunkt 1. Dessa två multipliceras ihop och divideras med summan av samtliga resistanser i D-kopplingen. För att få fram R_2 och R_3 resonerar man på liknande sätt.

Naturligtvis kan även det motsatta göras, att gå från Y- till D-koppling. Vid Y/D-transformation används följande formler:

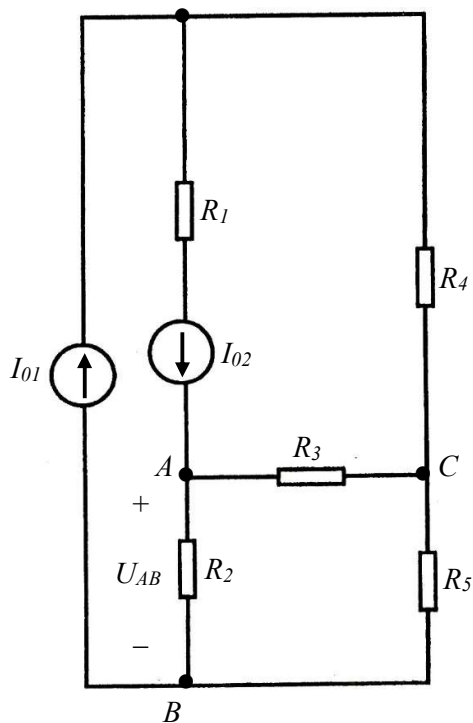
$$R_{12} = R_1 R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (1.10 \text{ a})$$

$$R_{23} = R_2 R_3 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (1.10 \text{ b})$$

$$R_{31} = R_3 R_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) \quad (1.10 \text{ c})$$

Exempel 1.9:

Beräkna spänningen U_{AB} .



$$I_{01} = 7,0 \text{ A}$$

$$I_{02} = 5,0 \text{ A}$$

$$R_1 = 1,0 \Omega$$

$$R_2 = 2,0 \Omega$$

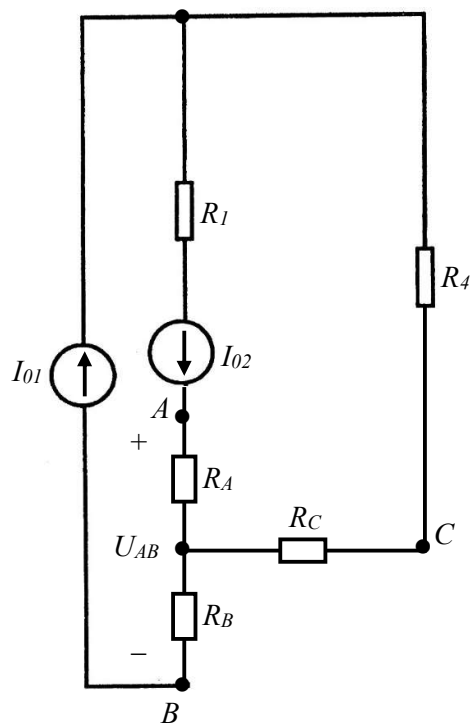
$$R_3 = 3,0 \Omega$$

$$R_4 = 4,0 \Omega$$

$$R_5 = 5,0 \Omega$$

Lösning:

D-kopplingen som består av R_2 , R_3 och R_5 görs om till en Y-koppling med R_A , R_B och R_C :



$$R_A = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3 + R_5} \Rightarrow R_A = 0,60 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5} \Rightarrow R_B = 1,0 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_2 + R_3 + R_5} \Rightarrow R_C = 1,5 \Omega$$

Spänningen U_{AB} är summan av spänningsfallen över R_A och R_B , dvs.

$$U_{AB} = R_A \cdot I_{02} + R_B \cdot I_{01} \Rightarrow U_{AB} = 0,60 \cdot 5,0 + 1,0 \cdot 7,0 = 10 \text{ V}$$

Svar: Den sökta spänningen är 10 V.

1.12 Superposition

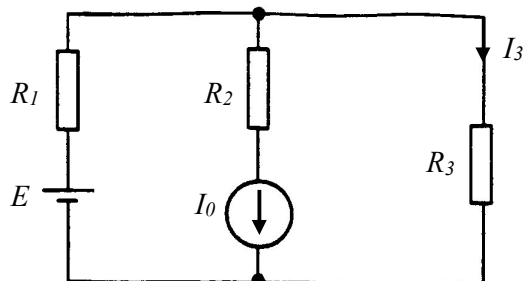
Superpositionsmetoden används för att lösa enklare problem då den aktuella kretsen inte innehåller så många ström- och spänningskällor. Naturligtvis kan även svårare problem lösas med metoden men leder då i allmänhet till långa räkningar med risk för slarvfel.

Om en ström eller spänning i kretsen skall beräknas, nollställer man alla källor utom en och beräknar bidraget från denna. Bidragen från samtliga källor skall beräknas under det att övriga är nollställda. Den sökta strömmen eller spänningen beräknas som summan av bidragen.

Innebörden av ovanstående brukar kallas *superpositionssatsen*. Den förutsätter att kretsen endast innehåller linjära element, exempelvis resistorer, där spänningsfallet är proportionellt mot strömmen. Superpositionssatsen är alltså inte tillämplig på kretsar med olinjära motstånd som har annan karakteristik än den som följer Ohms lag.

Exempel 1.10:

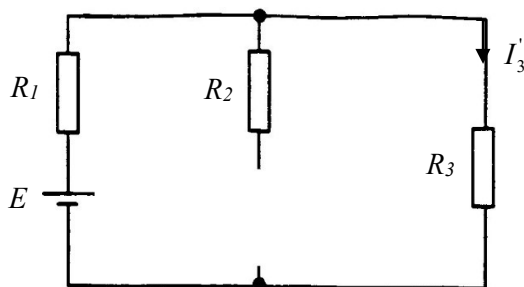
Beräkna strömmen I_3 .



$$\begin{aligned} E &= 12 \text{ V} \\ I_0 &= 4,0 \text{ A} \\ R_1 &= 1,0 \Omega \\ R_2 &= 2,0 \Omega \\ R_3 &= 3,0 \Omega \end{aligned}$$

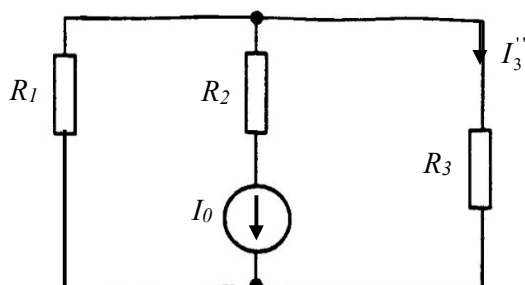
Lösning.

Nollställ I_0 och beräkna bidraget från E :



$$\text{Ohms lag} \Rightarrow I'_3 = \frac{E}{R_1 + R_3} \Rightarrow I'_3 = \frac{12}{1,0 + 3,0} = 3,0 \text{ A}$$

Nollställ E och beräkna bidraget från I_0 :



$$\text{Strömdelningslagen} \Rightarrow I_3'' = -I_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_3} \Rightarrow I_3'' = -4,0 \cdot \frac{1,0}{1,0 + 3,0} = -1,0 \text{ A}$$

$$\text{Superpositionssatsen} \Rightarrow I_3 = I_3' + I_3'' \Rightarrow I_3 = 3,0 + (-1,0) = 2,0 \text{ A}$$

Svar: Den sökta strömmen är $2,0 \text{ A}$.

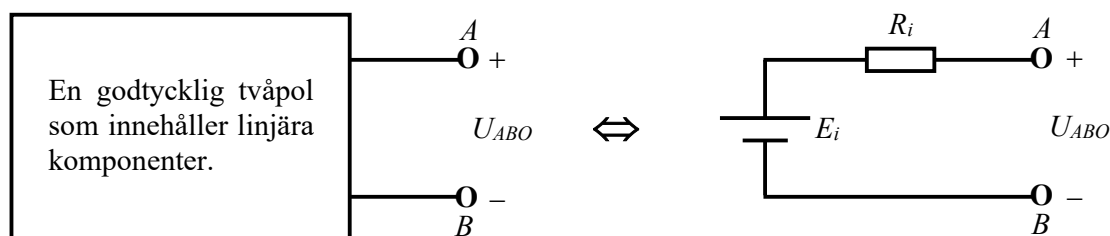
Lägg märke till att bidraget från I_0 i exempel 1.10 blev negativt. Det är alltså viktigt att man håller fast vid samma strömriktning på delströmmarna som man hade på den ursprungliga strömmen. Bidragen kan både bli positiva och negativa och därmed motverka varandra.

En annan sak som kan noteras är att nollställning av strömkällor innebär att de rycks bort och ersätts med avbrott. Nollställning av spänningskällor innebär att de ersätts med kortslutningar.

1.13 Ekvivalenta tvåpoler och tvåpolssatsen

En *tvåpol* är en krets med två anslutningspunkter. En sådan krets kan i stort sett se ut hur som helst. Mellan de två anslutningspunkterna kan en resistor kopplas in varvid en viss ström flyter genom den. Storleken på denna ström beror på hur stor *inre spänning* och hur hög *inre resistans* tvåpolen har.

Tvåpolssatsen säger att varje godtycklig tvåpol som innehåller linjära komponenter, kan ersättas med en ekvivalent tvåpol bestående av en inre spänningskälla E_i i serie med en inre resistans R_i . En sådan tvåpol kallas *Théveninekvivalent*⁷ och dess inre spänning är lika med tomgångsspänningen U_{ABO} .



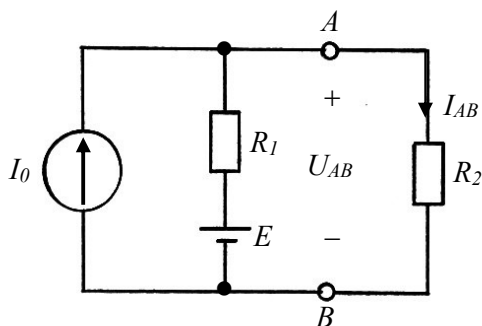
Figur 1.13 Tvåpolssatsen

⁷ Léon Charles Thévenin (1857-1926), fransk ingenjör.

Bokstaven "O" i indexet på U_{ABO} står för engelskans "open" vilket betyder att tvåpolen för tillfället är obelastad. Ingenting är kopplat mellan punkterna A och B . Kretsen är öppen och därmed flyter ingen ström. När ingen ström flyter i kretsen blir spänningsfallet noll över R_i vilket innebär att U_{ABO} och E_i måste vara lika stora.

Exempel 1.11:

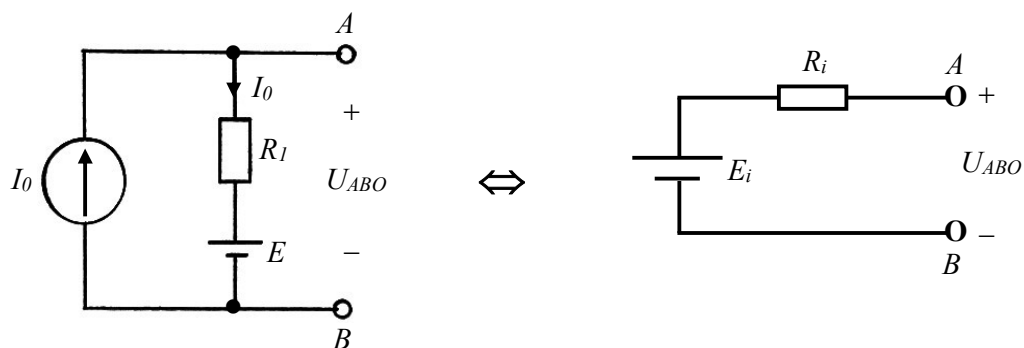
Beräkna strömmen I_{AB} samt spänningen U_{AB} .



$$\begin{aligned} I_0 &= 6,0 \text{ A} \\ E &= 12 \text{ V} \\ R_1 &= 8,0 \Omega \\ R_2 &= 4,0 \Omega \end{aligned}$$

Lösning:

Tvåpolssatsen \Rightarrow

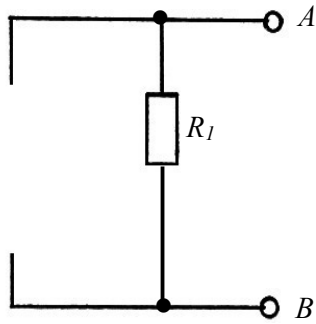


Tomgångsspänningen U_{ABO} är summan av E och spänningsfallet över R_1 , dvs.

$$U_{ABO} = E + R_1 \cdot I_0 \Rightarrow U_{ABO} = 12 + 8,0 \cdot 6,0 = 60 \text{ V}$$

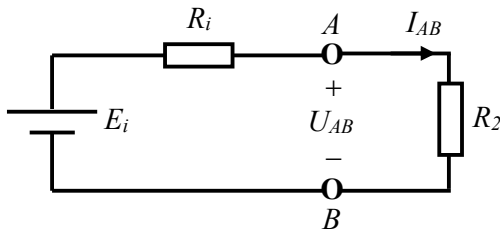
$$E_i = U_{ABO} \Rightarrow E_i = 60 \text{ V}$$

Inre resistansen R_i beräknas genom att nollställa både I_0 och E .



Mellan A och B är resistansen i det här fallet R_i , dvs.

$$R_i = R_l \Rightarrow R_i = 8,0 \Omega$$

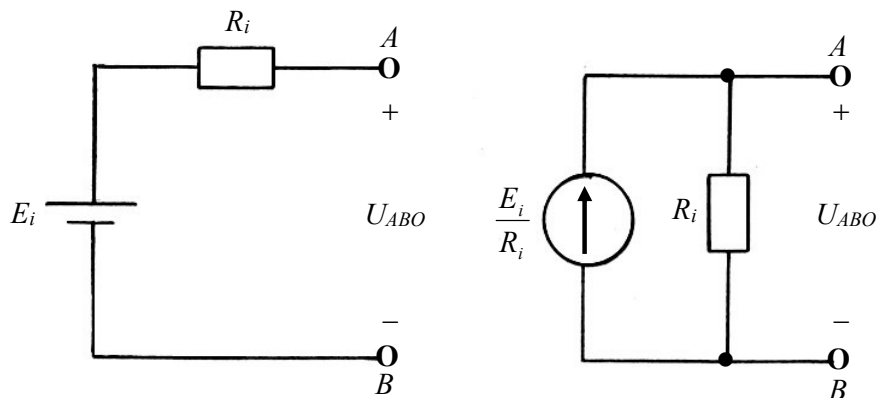


$$\text{Ohms lag} \Rightarrow I_{AB} = \frac{E_i}{R_i + R_2} \Rightarrow I_{AB} = \frac{60}{8,0 + 4,0} = 5,0 \text{ A}$$

$$U_{AB} = R_2 \cdot I_{AB} \Rightarrow U_{AB} = 4,0 \cdot 5,0 = 20 \text{ V}$$

Svar: Strömmen är 5,0 A och spänningen 20 V.

En annan typ av ekvivalent tvåpol är den s.k. *Nortonekvivalenten*⁸. Den har samma tomgångsspänning och samma inre resistans som *Théveninekvivalenten*.



Figur 1.14 Till vänster en Théveninekvivalent och till höger motsvarande Nortonekvivalent.

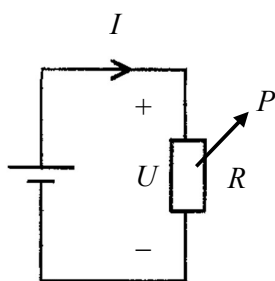
⁸ Edward Lawry Norton (1898-1983), amerikansk ingenjör vid Bell Telephone Laboratories

Att tomgångsspänningen U_{ABO} är densamma för de båda ekvivalenterna, kan man lätt övertyga sig om genom några enkla räkningar. Tidigare visades att $U_{ABO} = E_i$ för Théveninekvivalenten. Detsamma kan visas för Nortonekvivalenten där U_{ABO} är spänningen över R_i . Ohms lag ger att $U_{ABO} = R_i \cdot \frac{E_i}{R_i} = E_i$. Vidare, om vi nollställer spänningskällan och strömkällan i respektive tvåpol, finner vi att inre resistansen blir R_i i de båda fallen. Därmed har vi övertygat oss om att de två tvåpolerna verkligen är ekvivalenta.

1.13 Elektrisk effekt och energi

Elektrisk effekt betecknas med bokstaven P som i engelskans "power". Även andra typer av effekt exempelvis mekanisk effekt, betecknas så. Enheten för effekt är *watt*⁹ och förkortas [W].

Effektutvecklingen i en resistor är förknippad med värme.



Figur 1.14 Effektutveckling i en resistor.

För att beräkna effekten används formeln:

$$P = U \cdot I \quad (1.11 \text{ a})$$

Enligt Ohms lag är $U = R \cdot I$ vilket insatt i formel 1.11 a ger:

$$P = R \cdot I^2 \quad (1.11 \text{ b})$$

Eller om istället $I = \frac{U}{R}$ sätts in i samma formel, så får vi:

$$P = \frac{U^2}{R} \quad (1.11 \text{ c})$$

Man kan säga att formel 1.11 a är grundformeln för beräkning av elektrisk effekt och att de andra är två vanliga varianter av densamma.

Vid beräkning av *energi* multipliceras effekten med tid, dvs.

$$W = P \cdot t \quad (1.12 \text{ a})$$

⁹ James Watt (1736-1819), engelsk uppfinnare.

Formel 1.12 a förutsätter att effekten är konstant. Om inte så är fallet, måste energin integreras fram med uttrycket

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt \quad (1.12 b)$$

Energi mäts i enheten *joule*¹⁰ [J], *wattsekund* [Ws] eller *newtonmeter*¹¹ [Nm]. Den senare enheten används sällan i samband med elektrisk energi utan företrädevis inom mekaniken. Energi kan förknippas med arbete som heter ”work” på engelska, därav beteckningen *W* på storheten.

Exempel 1.12:

Hur stor ström drar en 60 W glödlampa som är ansluten till 230 V och hur stor blir energiförbrukningen om den är inkopplad en hel vecka?

Lösning:

$$P = U \cdot I \Rightarrow 60 = 230 \cdot I \Rightarrow I = \frac{60}{230} \approx 0,26 \text{ A}$$

$$\text{En vecka} = 7 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ sekunder} \Rightarrow t = 604800 \text{ s}$$

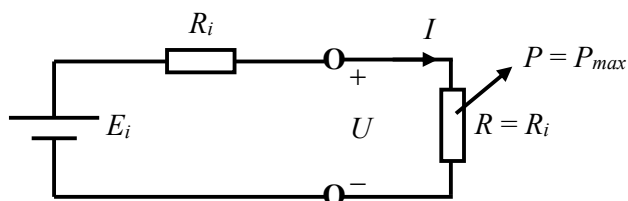
$$W = P \cdot t \Rightarrow W = 60 \cdot 604800 = 36288000 \text{ Ws} \Rightarrow W \approx 10 \text{ kWh}$$

Svar: Glödlampan drar 0,26 A och förbrukar 10 kWh.

1.14 Effektanpassning

I vardagen finns exempel på elektriska saker som kan betraktas som ekvivalenta tvåpoler. Stereon med tillhörande högtalare är ett sådant. På stereoförstärkarens baksida brukar stå angivet ett ohmtal vid högtalarutgångarna. Som användare vet man då för vilket motstånd i högtalarna effektuttaget blir maximalt. Det angivna ohmtalet talar också om vilket inre motstånd förstärkaren har. Maximalt effektuttag erhålles alltså då högtalarens motstånd är detsamma som inre motståndet hos förstärkaren. Fenomenet kallas *effektanpassning*. Uteffektens storlek beror naturligtvis också på hur stor inre spänning som genereras i förstärkaren. Den inre spänningens storlek avgörs av hur mycket volymkontrollen dragits på.

Ett annat exempel på effektanpassning är när en belastningsresistans *R* kopplas till en likspänningskälla med inre emk:n *E_i* och inre resistansen *R_i*.



Figur 1.15 Effektanpassning i en likströmskrets.

¹⁰ James Prescott Joule (1818-1889), engelsk fysiker tillika värmelärens fader.

¹¹ Isaac Newton (1642 -1727) engelsk alkemist, fysiker, filosof, matematiker, mystiker...

Låt oss nu bevisa att $P = P_{max}$ då $R = R_i$, så som antyds i figur 1.15:

Effektlagen $\Rightarrow P = U \cdot I$

Spänningsdelningslagen $\Rightarrow U = E_i \cdot \frac{R}{R_i + R}$

Ohms lag $\Rightarrow I = \frac{E_i}{R_i + R}$

När uttrycken för U och I sätts in i effektlagen, fås $P = R \cdot \left(\frac{E_i}{R_i + R}\right)^2$

Vi ser att det sista uttrycket för P egentligen är en produkt av två funktioner, dvs.

$P = f(R) \cdot g(R)$ där $f(R) = R$ och $g(R) = \left(\frac{E_i}{R_i + R}\right)^2$

För att bestämma vilket R som ger maximalt värde på P , måste P först deriveras med avseende på R och sen sättas lika med noll.

$\frac{dP}{dR} = f'(R) \cdot g(R) + f(R) \cdot g'(R)$ där $f'(R) = 1$ och $g'(R) = \frac{-2}{R + R_i} \cdot \left(\frac{E_i}{R_i + R}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{dP}{dR} = 1 \cdot \left(\frac{E_i}{R_i + R}\right)^2 + R \cdot \frac{-2}{R + R_i} \cdot \left(\frac{E_i}{R_i + R}\right)^2 = \left(\frac{E_i}{R_i + R}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{2R}{R_i + R}\right)$

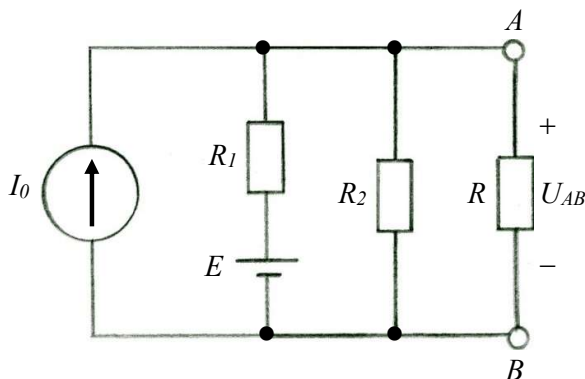
$\frac{dP}{dR} = 0$ om $\left(1 - \frac{2R}{R_i + R}\right) = 0 \Rightarrow R = R_i$

Att $R = R_i$ leder till att $P = P_{max}$ övertygar man sig om genom att exempelvis testa med värden på R som både är mindre och större än R_i i uttrycket för P . Samma uttryck kan användas för att bestämma P_{max} .

Dvs. $R = R_i$ insatt i $P = R \cdot \left(\frac{E_i}{R_i + R}\right)^2$ ger $P \frac{E_i^2}{4R_{i,max}}$ (1.13)

Exempel 1.13:

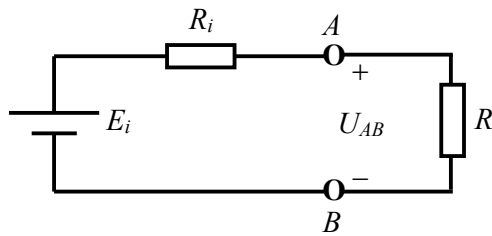
Beräkna den maximala effekt som kan erhållas i R och det värde R då har.



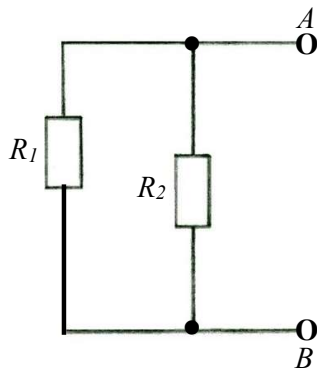
$I_0 = 1 \text{ A}$
 $E = 12 \text{ V}$
 $R_1 = 12 \text{ } \Omega$
 $R_2 = 6 \text{ } \Omega$

Lösning:

Den befintliga tvåpolen ersätts först med en ekvivalent tvåpol enligt tvåpolssatsen.



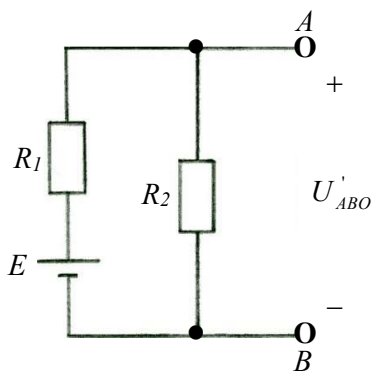
För att bestämma R_i nollställer man I_0 och E i det givna schemat och beräknar resistansen mellan A och B .



$$\text{Vi ser då att } R_i = R_1 // R_2 \text{ dvs. } R_i = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow R_i = \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = 4 \Omega$$

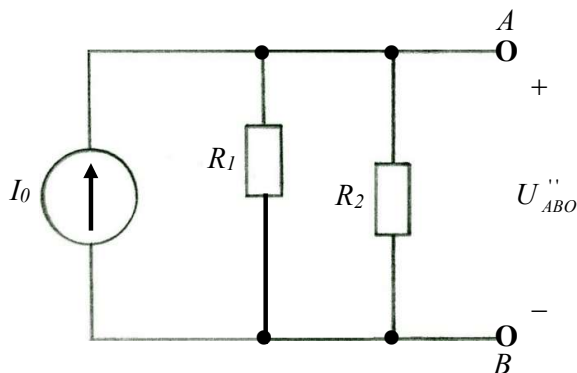
Inre emk:n är lika med tvåpolens tomgångsspänning, dvs. $E_i = U_{ABO}$.

Nollställ I_0 och beräkna bidraget från E :



$$U'_{ABO} = E \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow U'_{ABO} = 12 \cdot \frac{6}{12 + 6} = 4 \text{ V}$$

Nollställ E och beräkna bidraget från I_0 :



$$U''_{ABO} = I_0 \cdot \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow U''_{ABO} = 1 \cdot \frac{12 \cdot 6}{12 + 6} = 4 \text{ V}$$

Alltså, tvåpolens tomgångsspänning

$$U_{ABO} = U'_{ABO} + U''_{ABO} \Rightarrow U_{ABO} = 4 + 4 = 8 \text{ V} \Rightarrow E_i = 8 \text{ V}$$

För effektanpassning, välj $R = R_i \Rightarrow P_{max} = \frac{E_i^2}{4R_i}$

$$\text{Alltså, välj } R = 4 \Omega \Rightarrow P_{max} = \frac{8^2}{4 \cdot 4} = 8 \text{ W}$$

Svar: Maximala effekten blir 8 W då R är 4 Ω .

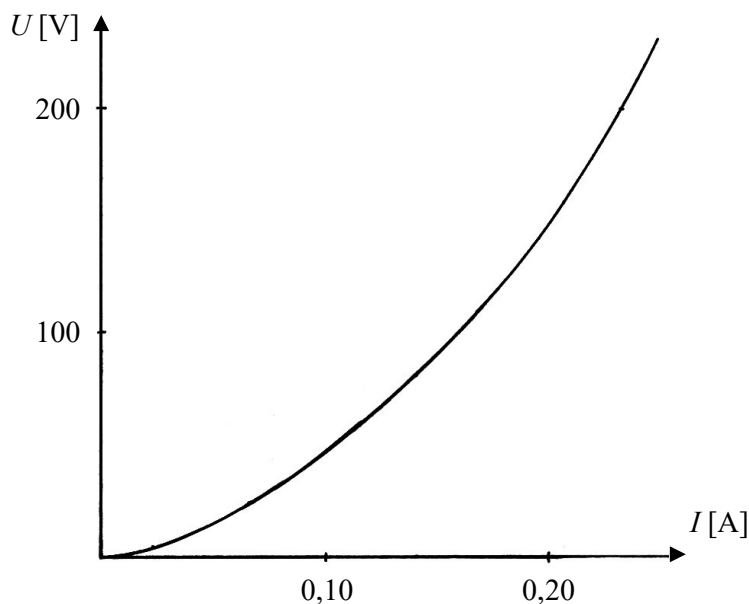
1.15 Olinjära resistanser

Ohms lag säger att spänningen är proportionell mot strömmen i en resistans. Detta är sant så länge resistansen är konstant och inte påverkas av yttre faktorer, exempelvis temperatur. PTC- och NTC-motstånd påverkas av temperatur så att resistansen ökar respektive minskar med ökad temperatur. PTC står för *Positive Temperature Constant* och NTC för *Negative Temperature Constant*. Motstånd som påverkas av temperaturen kallas *termistorer* och används bl.a. som givare vid temperaturmätning eller som spänningsbegränsare i förstärkarkopplingar för att skydda känsliga komponenter om temperaturen ökar.



Figur 1.16 SchemasyMBOL för en termistor.

I en vanlig glödlampa varierar resistansen väldigt mycket beroende på vilken spänning den matas med. Det innebär att spänning/strömkaraktistiken inte följer Ohms lag som är en linjär funktion, utan snarare en andragsradsfunktion.



Figur 1.17 Sambandet mellan spänning och ström för en 230 V/60 W glödlampa.

I verkligheten existerar inga ideala resistanser. Motståndet i dem påverkas av alla möjliga faktorer, som t.ex. temperaturen. Hur känsliga resistorena är för temperaturändringar beror också på vad de är tillverkade av för material. För att räkna på detta används formeln

$$R = R_{20}[1 + \alpha(T - 20)] \quad (1.14)$$

där R = resistansen

R_{20} = resistansen vid 20 °C (grader Celsius¹²)

α = temperaturkoefficienten

T = resistorns temperatur

Exempel 1.14:

Bestäm temperaturen på glödtråden hos en 230 V/60 W glödlampa när den matas med sin märkspänning. Vid 20 °C är lampans resistans 62 Ω. Glödtråden är tillverkad av wolfram som har temperaturkoefficienten 0,0045 °C⁻¹.

¹² Anders Celsius (1701-1744), svensk astronom.

Lösning:

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow 60 = \frac{230^2}{R} \Rightarrow R = 882 \Omega$$

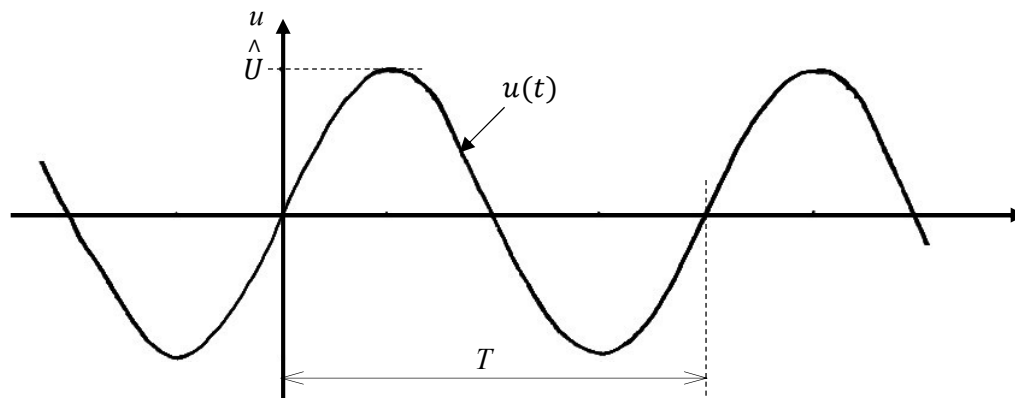
$$R = R_{20}[1 + \alpha(T - 20)] \Rightarrow 882 = 62[1 + 0,0045(T - 20)] \Rightarrow T = 2958 \text{ }^\circ\text{C}$$

Svar: Glödtrådens temperatur är ungefär $3,0 \cdot 10^3 \text{ }^\circ\text{C}$

2 Växelströmlära

2.1 Matematisk beskrivning av växelspanning och växelström

Kännetecknande för växelströmmen är att den till skillnad från likströmmen byter riktning hela tiden. Detta kan ske mjukt eller ryckigt, regelbundet eller oregelbundet. Största delen av det här kapitlet kommer att ägnas åt sinusformad växelspanning och växelström vars riktningsbyte sker mjukt och regelbundet med en bestämd *frekvens*. Inledningsvis kommer dock även andra kurvformer att uppmärksammas.



Figur 2.1 Tidsdiagram för en sinusformad växelspanning $u(t)$.

Växelspanningen i figur 2.1 kan beskrivas matematiskt med tidsuttrycket $u(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$ där \hat{U} står för spänningens toppvärde och ω för dess vinkelfrekvens. Lägga märke till att växelspanning betecknas med liten bokstav ” u ”. Den lilla bokstaven markerar att det är fråga om växelspanning som varierar med tiden. I tidsuttrycket skulle vi därför kunna avstå från att förtydliga att u är en funktion av tiden t . ” $u(t)$ ” som lika gärna kan skrivas bara ” u ”, är alltså båda två vedertagna beteckningar för växelspanningens momentanvärde. Enheten för såväl spänningens momentanvärde och toppvärde är *volt*, precis som för likspänning. Det gäller även spänningens *effektivvärde* som betecknas U . Effektivvärde används i samband med effektberäkning och erhålles för sinusformad spänning genom att dividera toppvärdet med $\sqrt{2}$. Mer om detta senare.

Vinkelfrekvens ω mäts i *radianer per sekund* och skrivs [rad/s] eller enbart [s^{-1}]. Mellan vinkelfrekvens och vanlig frekvens skiljer en faktor 2π , dvs.

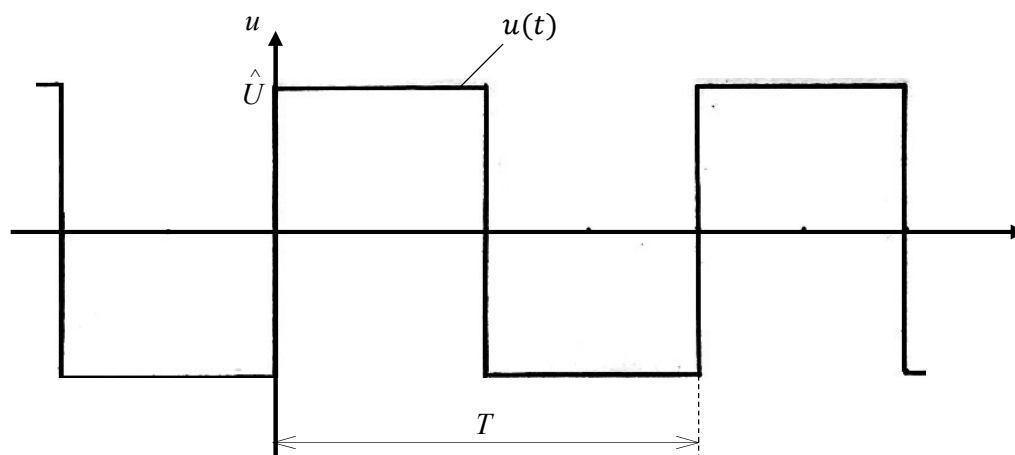
$$\omega = 2\pi f \quad (2.1)$$

Enheten för vanlig frekvens f är *perioder per sekund* eller *hertz*¹³ som skrivs [Hz]. *Periodtiden* T , även kallad enbart *perioden*, finns markerad i figur 2.1 och är den tid det tar för spänningen att fullborda en komplett svängning. Sambandet mellan frekvens och periodtid ges av uttrycket

$$f = \frac{1}{T} \quad (2.2)$$

¹³ Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894), tysk fysiker.

Sinusformad växelspanning är den renaste formen av växelspanning. Alla andra former, exempelvis fyrkantformad växelspanning, består av en *grundton* och en massa *övertoner*. Den sinusformade spänningen utgörs endast av grundtonen och är helt befriad från övertoner. Fyrkantformade växelspanningar ger upphov till mer eller mindre ryckig strömväxling i elektriska kretsar, beroende på vad kretsarna är uppbyggda av.



Figur 2.2 Tidsdiagram för en fyrkantformad växelspanning $u(t)$.

Matematiskt skulle man kunna beskriva växelspanningen i figur 2.2 på följande sätt:

$$u(t) = \begin{cases} +\hat{U} & \text{för } nT \leq t < \frac{T}{2} + nT \text{ där } n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \\ -\hat{U} & \text{för } \frac{T}{2} + nT \leq t < T + nT \text{ där } n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

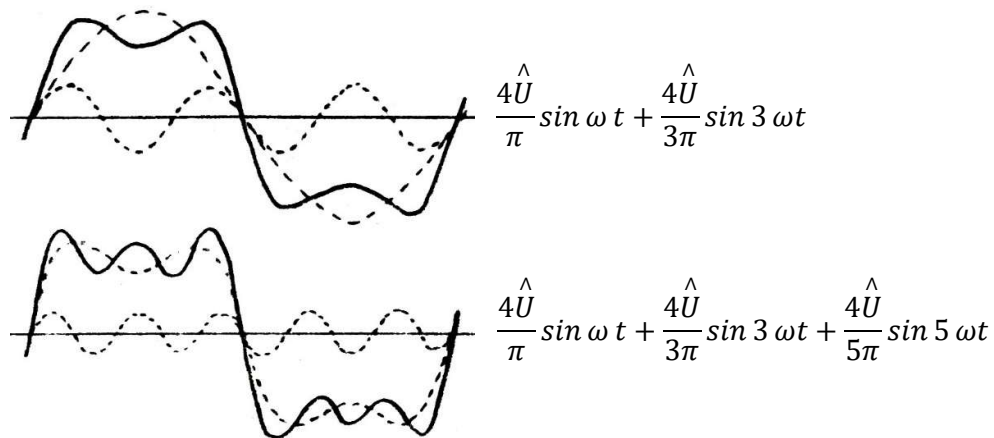
Ett annat sätt att beskriva fyrkantspänningen är med en *Fourierserie*¹⁴:

$$u(t) = \frac{4\hat{U}}{\pi} \left(\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \dots \right) \Leftrightarrow$$

$$u(t) = \frac{4\hat{U}}{\pi} \sin \omega t + \frac{4\hat{U}}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{4\hat{U}}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots$$

Första termen i serien anger grundtonen och resterande termer spänningens övertoner. Serien konvergerar ganska snabbt varvid summan av endast ett fåtal termer ger en hygglig approximation av fyrkantspänningen.

¹⁴Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), fransk matematiker.

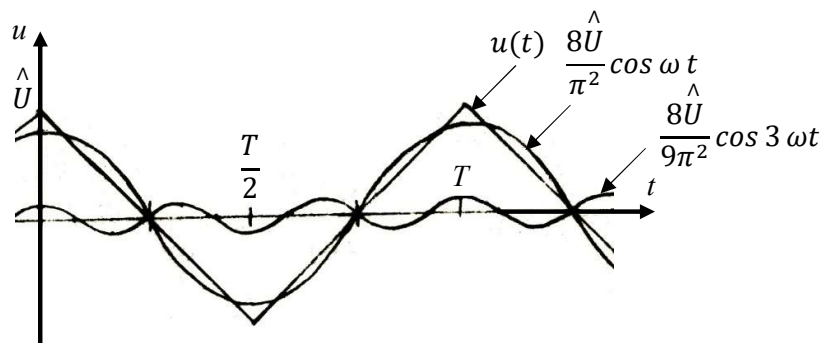


Figur 2.3 Illustration av hur en fyrkantspänning successivt växer fram vid addition av Fouriersseriens deltoner.

Triangelspänning är ytterligare ett exempel på en icke sinusformad spänning. En sådan kan beskrivas av Fourierserien:

$$u(t) = \frac{\hat{8U}}{\pi^2} \left(\cos \omega t + \frac{1}{9} \cos 3 \omega t + \frac{1}{25} \cos 5 \omega t + \dots \right) \Leftrightarrow$$

$$u(t) = \frac{\hat{8U}}{\pi^2} \cos \omega t + \frac{\hat{8U}}{9\pi^2} \cos 3 \omega t + \frac{\hat{8U}}{25\pi^2} \cos 5 \omega t + \dots$$

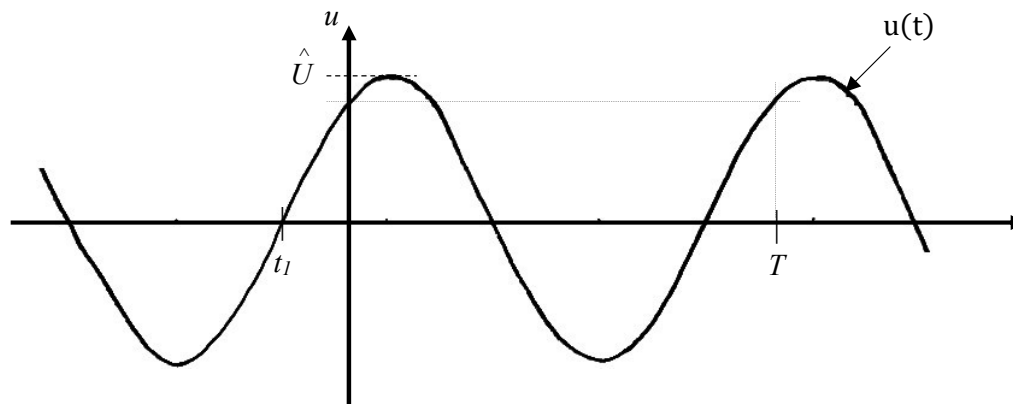


Figur 2.4 Illustration av hur en triangelspänning växer fram vid addition av rätt avpassade deltoner.

Hittills har endast växelspänningar nämnts. När det gäller växelströmmar är det inga konstigheter. De beskrivs på samma sätt men med den skillnaden att bokstaven "u" byts ut mot "i". Växelströmmens momentanvärde betecknas således "i" eller "i(t)", toppvärdet "I-hat" och effektivvärdet I. En ström med samma utseende som spänningen i figur 2.1 kan därför skrivas $i(t) = \hat{I} \sin \omega t$.

2.2 Visardiagram

I figur 2.1 såg vi exempel på en sinusformad växelspanning där kurvan gick genom origo. Om en sinusformad spänning skall beskrivas mer allmänt bör istället kurvan flyttas i sidled.



Figur 2.5 Godtycklig sinusspänning där $u(t) = 0$ för $t = t_1$.

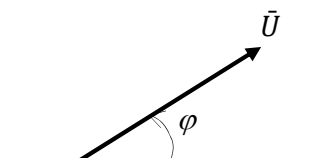
Den godtyckliga sinusspänningen i figur 2.5 beskrivs med det allmänna tidsuttrycket

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \varphi) \quad (2.3)$$

där $\varphi = -2\pi \cdot \frac{t_1}{T}$ [radianer]

Den grekiska bokstaven φ betecknar spänningens *fasvinkel*. Om 2π byts ut mot 360 i formeln, erhålls istället fasvinkeln uttryckt i *grader* [$^\circ$]. I litteraturen förekommer båda varianterna, även om en matematiker skulle anse det vara mer korrekt att ange fasvinkeln i radianer. De flesta elektrotekniker däremot föredrar att tala om fasvinkeln uttryckt i *grader*, trots att man gör sig skyldig till inkonsekvens då produkten ωt faktiskt har enheten *radianer*.

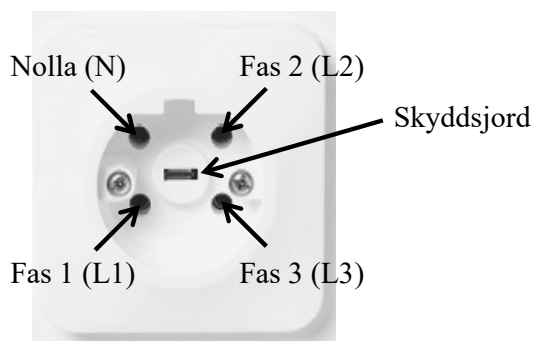
Om man vill addera eller subtrahera två sinusformade spänningar, kan det vara praktiskt att representera dem med vektorer i ett s.k. *visardiagram*. Vektorernas längder skall vara proportionella mot spänningarnas amplituder (toppvärden) och dess riktningar skall svara mot respektive fasvinklar.



Figur 2.6 Visarrepresentation av sinusspänningen i figur 2.5.

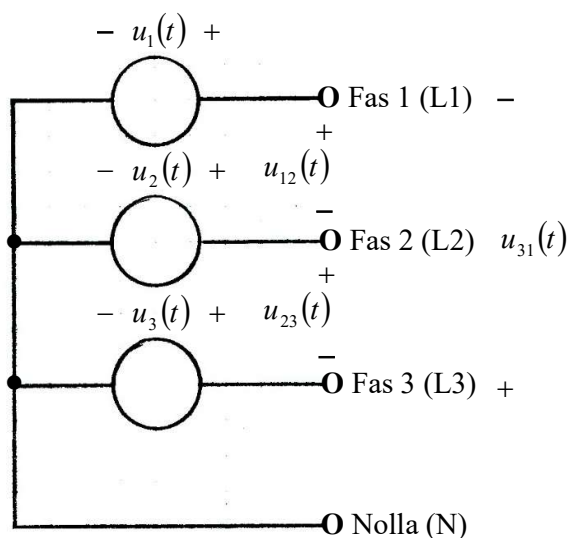
Exempel 2.1:

Bakom spisar i hushåll finns ofta *trefas* vägguttag av s.k. *perilex*typ:



Av bilden framgår att uttaget består av ett rektangulärt hål i mitten och fyra cirkulära hål runt omkring. Uttaget i mitten är elektriskt neutralt och kallas *skyddsjord*. Bland de övriga fyra hålen finns också ett hål som är elektriskt neutralt och som kallas *nolla*. Skyddsjorden och nollan är förbundna med varandra i hushållets gruppcentral, där elmätaren och huvudsäkringarna brukar sitta. De återstående tre hålen kallas *faser* och är strömförande.

Vad som döljer sig bakom uttaget, kan beskrivas med följande elektriska principskiss:



Spänningarna u_1 , u_2 och u_3 kallas *fasspänningar*. I Europa har man enats om följande standard för fasspänningarna:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= 230\sqrt{2} \sin(100\pi t + 0^\circ) \text{ V} \\u_2(t) &= 230\sqrt{2} \sin(100\pi t - 120^\circ) \text{ V} \\u_3(t) &= 230\sqrt{2} \sin(100\pi t - 240^\circ) \text{ V}\end{aligned}$$

De andra tre spänningarna u_{12} , u_{23} och u_{31} som markerats i figuren, kallas *huvudspänningar*.

- a) Bestäm toppvärdet, effektivvärdet, vinkelfrekvensen, frekvensen och periodtiden för de tre fasspänningarna.
- b) Rita de tre fasspänningarna i ett visardiagram. Låt exempelvis $230\sqrt{2}$ V motsvara 23 mm.
- c) Bestäm med hjälp av visardiagrammet tidsuttrycken för huvudspänningarna u_{12} , u_{23} och u_{31} .

Lösning:

- a) I de tre tidsuttrycken ser man att toppvärdet är detsamma.

$$\Rightarrow \hat{U} = 230\sqrt{2} \approx 325 \text{ V}$$

Effektivvärdet fås genom att dividera toppvärdet med $\sqrt{2}$.

$$\Rightarrow U = 230 \text{ V}$$

Man ser också att vinkelfrekvensen är densamma i de tre tidsuttrycken.

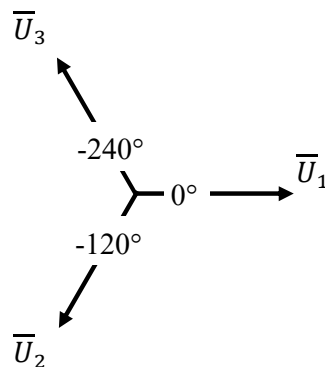
$$\Rightarrow \omega = 100\pi \approx 314 \text{ rad/s}$$

Frekvensen fås genom att dividera vinkelfrekvensen med 2π .

$$\Rightarrow f = 50 \text{ Hz}$$

$$\text{Periodtiden ges av sambandet } T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 20 \text{ ms}$$

- b) Riktningen på de tre spänningsvektorerna avgörs av vilken fasvinkel som står angiven i respektive tidsuttryck.



c) Av kopplingsschemat framgår att

$$u_{12} = u_1 - u_2$$

$$u_{23} = u_2 - u_3$$

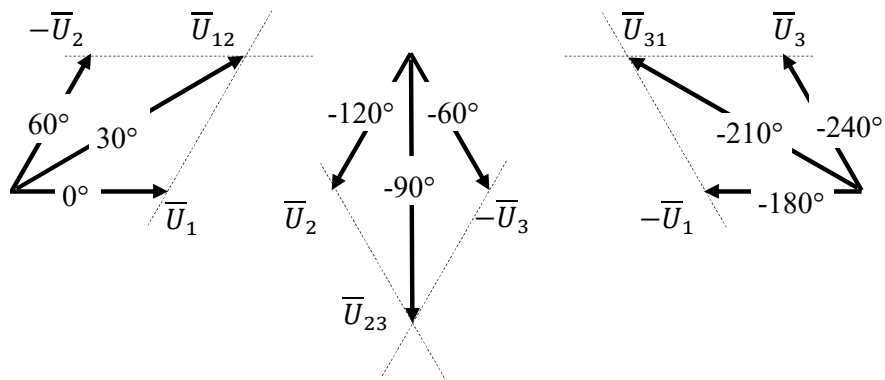
$$u_{31} = u_3 - u_1$$

Det kan vara ganska krångligt att subtrahera tidsuttrycken. Att hantera vektorerna är däremot enklare.

$$\bar{U}_{12} = \bar{U}_1 - \bar{U}_2$$

$$\bar{U}_{23} = \bar{U}_2 - \bar{U}_3$$

$$\bar{U}_{31} = \bar{U}_3 - \bar{U}_1$$



Om man har ritat skalenligt och valt att rita \bar{U}_1 , \bar{U}_2 och \bar{U}_3 med längderna 23 mm så blir \bar{U}_{12} , \bar{U}_{23} och \bar{U}_{31} cirka 40 mm långa. Därmed blir toppvärdet för spänningarna ungefär $400\sqrt{2}$ V. Fasvinklarna framgår av visardiagrammen. Huvudspänningarnas tidsuttryck blir således

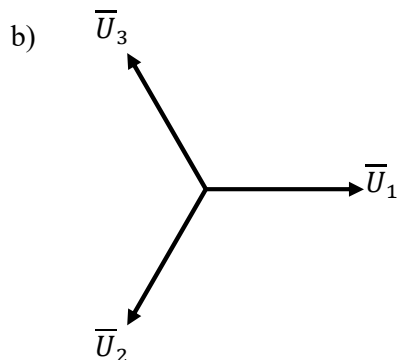
$$u_{12}(t) \approx 400\sqrt{2} \sin(100\pi t + 30^\circ) \text{ V}$$

$$u_{23}(t) \approx 400\sqrt{2} \sin(100\pi t - 90^\circ) \text{ V}$$

$$u_{31}(t) \approx 400\sqrt{2} \sin(100\pi t - 210^\circ) \text{ V}$$

Svar:

a) Toppvärdet för fasspänningarna är 325 V, effektivvärdet 230 V, vinkelfrekvensen 314 rad/s, frekvensen 50 Hz och periodtiden 20 ms.



c) Huvudspänningarnas tidsuttryck blir

$$u_{12}(t) \approx 400\sqrt{2} \sin(100\pi t + 30^\circ) \text{ V}$$

$$u_{23}(t) \approx 400\sqrt{2} \sin(100\pi t - 90^\circ) \text{ V}$$

$$u_{31}(t) \approx 400\sqrt{2} \sin(100\pi t - 210^\circ) \text{ V}$$

2.3 Effektivvärde

När det talas om växelspanning i största allmänhet och någon t.ex. säger att spänningen är 230 V, menas alltid att dess effektivvärde är 230 V. Om något annat avses, exempelvis att spänningens toppvärde är 230 V, måste detta klart och tydligt framgå. Effektivvärdet på spänning och ström används alltid i samband med effektberäkningar. Mer om detta i avsnitt 2.5.

I förra avsnittet nämndes att toppvärdet skulle divideras med $\sqrt{2}$ för att få fram effektivvärdet för en sinusformad spänning eller ström. För den fyrkantformade spänningen i figur 2.2 är effektivvärdet detsamma som toppvärdet medan effektivvärdet för den triangelformade spänningen i figur 2.4 fås genom att dividera toppvärdet med $\sqrt{3}$. Effektivvärde har också fått namnet *RMS-värde* där *R* står för "root", *M* för "mean" och *S* för "square" (rot, medelvärde respektive kvadrat). Det beror på att effektivvärde beräknas enligt formeln:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (u(t))^2 dt} \quad (2.4)$$

I formeln ses rottecknet, medelvärdesberäkningen $\frac{1}{T} \int_0^T$ och kvadreringen av den aktuella funktionen. För skojs skull kan vi kolla upp om det verkligen stämmer, att toppvärdet skall divideras med $\sqrt{2}$ vid beräkning av effektivvärdet för en sinusformad spänning.

Exempel 2.2:

Visa att $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ för en sinusformad växelspanning.

Bevis:

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (\hat{U} \sin(\omega t))^2 dt} = \sqrt{\frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \hat{U}^2 \sin^2(\omega t) dt} = \sqrt{\frac{2\hat{U}^2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2} dt} = \\ &= \sqrt{\frac{2\hat{U}^2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{2} dt - \frac{2\hat{U}^2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\cos(2\omega t)}{2} dt} = \sqrt{\frac{2\hat{U}^2}{T} \left[\frac{t}{2} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2\hat{U}^2}{T} \left[\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^{\frac{T}{2}}} \end{aligned}$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Om T byts ut mot $\frac{2\pi}{\omega}$ i uttrycket ovan fås:

$$\begin{aligned}
 U &= \sqrt{\frac{\hat{\omega} \hat{U}^2}{\pi} \left[\frac{t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}} - \frac{\hat{\omega} \hat{U}^2}{\pi} \left[\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega} \right]_0^{\frac{\pi}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\hat{\omega} \hat{U}^2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2\omega} - 0 \right] - \frac{\hat{\omega} \hat{U}^2}{\pi} \left[\frac{\sin(2\pi)}{4\omega} - \frac{\sin 0}{4\omega} \right]} = \\
 &= \sqrt{\frac{\hat{\omega} \hat{U}^2}{\pi} \left[\frac{\pi}{2\omega} - 0 \right] - \frac{\hat{\omega} \hat{U}^2}{\pi} [0 - 0]} = \sqrt{\frac{\hat{U}^2}{2}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

2.4 Induktans, kapacitans och reaktans

Sedan tidigare från likströmsläran i kapitel 1 känner vi till resistansen. I det här avsnittet skall vi bekanta oss med två nya grundläggande komponenter inom elektrotekniken, *induktansen* och *kapacitansen*. Dessa två brukar mer vardagligt kallas *spolen* respektive *kondensatorn*. En viss nyansskillnad föreligger dock om man skall vara noga. En spole är detsamma som en icke ideal induktans och en kondensator kan sägas vara en icke ideal kapacitans. Med det menas att i spolar och kondensatorer finns även annat inbyggt som påverkar de elektriska egenskaperna, exempelvis resistans. Någon ren resistans existerar inte heller i verkligheten. Man talar ofta om *motstånd* och menar då vanligtvis icke ideal resistans som är förorenad med exempelvis induktans.



Figur 2.7 a) Schemasympol för en spole med induktansen L .

b) Schemasympol för en kondensator med kapacitansen C .

Av schemasympolen i figur 2.7 a kan vi se att en spole består av en metalltråd som är lindad ett antal varv, ju fler varv desto högre induktans. Om spolen dessutom lindas på en järnkärna ökar induktansen ytterligare. Vanligtvis används lackerad koppartråd där lacken tjänstgör som isolering för att förhindra kortslutning. Koppar har väldigt låg resistans jämfört med andra metaller vilket är önskvärt då man eftersträvar att få spolen att likna en ideal induktans så mycket som möjligt. Induktans betecknas L och mäts i *henry*¹⁵ som förkortas [H]. För att bestämma induktansen hos en fysisk spole, kan följande uttryck användas.

$$L = \mu_r \mu_0 \frac{N^2 A}{l} \quad (2.5)$$

där

μ_r = permeabilitetsfaktorn för spolkärnan

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$ som är permeabiliteten för vakuum

N = antalet lindningsvarv hos spolen

A = spolens tvärsnittsarea

l = spolens längd

¹⁵ Joseph Henry (1797-1878), amerikansk fysiker.

Om spolen är luftlindad blir μ_r ungefär 1 men om den är lindad på järnkärna kan μ_r variera mellan 1000 och 10000 beroende på hur järnet är beskaffat.

Schemasymbolen i figur 2.7 b antyder att en kondensator består av två plattor med ett litet mellanrum mellan dem. Mellanrummet kallas dielektrikum och ju mindre det är desto större blir kapacitansen. Kapacitansen påverkas också av plattornas storlek. Enheten för kapacitans är *farad*¹⁶ och förkortas [F]. Kapacitansen bestäms av uttrycket

$$C = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.6)$$

där

ε_r = dielektricitetskonstanten

$\varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi} \frac{\text{F}}{\text{m}}$, dielektriciteten för vakuum

A = kondensatorplattornas area

d = avståndet mellan kondensatorplattorna

För luft är ε_r ungefär 1 vilket leder till att kondensatorerna blir stora och klumpiga om hög kapacitans önskas. Därför är det vanligt att andra material med högre ε_r -värde används i dielektrikum för att därigenom få upp kapacitansvärdet utan att kondensatorerna blir onödigt stora.

Precis som resistansen så tjänstgör induktansen och kapacitansen också som en form av motstånd. Motståndet i dessa två kallas för *reaktans* och mäts i ohm. Det som skiljer motstånden åt är att resistans är konstant och oberoende av frekvensen medan reaktans varierar med frekvensen. Den induktiva reaktansen ges av uttrycket

$$X_L = \omega L \quad (2.7)$$

och den kapacitiva reaktansen av

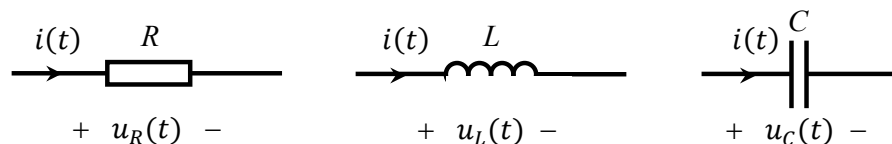
$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (2.8)$$

där ω är vinkelfrekvensen, se avsnitt 2.1. Av uttryck (2.7) framgår att X_L ökar med frekvensen medan X_C minskar med densamma. När det gäller likström så är frekvensen noll vilket innebär att X_L blir noll (kortslutning) och X_C oändlig (avbrott).

¹⁶ Enheten är uppkallad efter Michael Faraday (1791-1867), engelsk kemist och fysiker.

2.5 Samband mellan spänning och ström

För att kunna utföra beräkningar på växelströmsnät måste man känna till hur komponenterna beter sig, dvs. vilka samband som råder mellan spänning och ström hos dem.

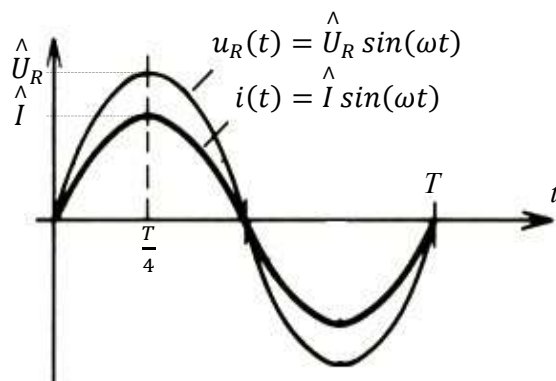


Figur 2.8 Spänningar och strömmar utritade i anslutning till schemasymbolerna för resistans, induktans och kapacitans.

Spänningen över resistansen ges av sambandet:

$$u_R(t) = R \cdot i(t) \quad (2.9)$$

Sambandet känns igen sedan tidigare som ohms lag, där proportionalitet råder mellan ström och spänning. Spänningen ligger alltså i fas med strömmen. För sinusformad spänning och ström kan detta illustreras i ett tidsdiagram:



Figur 2.9 Spänningen över en godtycklig resistans ritad i samma tidsdiagram som strömmen.

När det gäller induktansen och kapacitansen så ligger deras respektive spänningar färförskjutna gentemot strömmen. Spänningarna ges av uttrycken:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad (2.10)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt \quad (2.11)$$

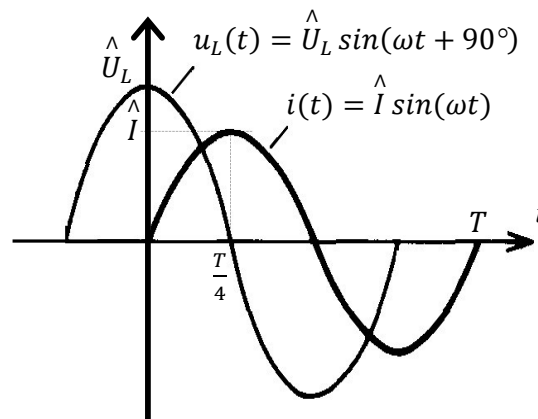
Om $i(t) = \hat{I} \sin(\omega t)$ sätts in i uttryck (2.10) fås:

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt}(\hat{I} \sin(\omega t)) = \omega L \cdot \hat{I} \cos(\omega t) = X_L \cdot \hat{I} \cos(\omega t) = \hat{U}_L \cos(\omega t) = \hat{U}_L \sin(\omega t + 90^\circ)$$

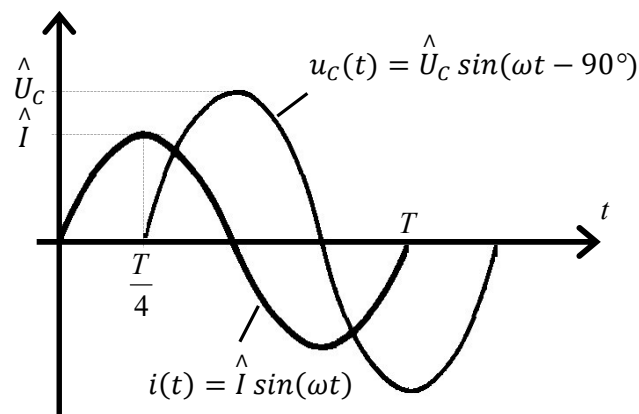
Då samma ström sätts in i uttryck (2.11) fås:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int \hat{I} \sin(\omega t) dt = -\frac{1}{\omega C} \cdot \hat{I} \cos(\omega t) + K = -X_C \cdot \hat{I} \cos(\omega t) + K = -\hat{U}_C \cos(\omega t) + K = \hat{U}_C \sin(\omega t - 90^\circ) + K$$

K är matematiskt sett en godtycklig konstant. Elektriskt sett är konstanten en godtycklig likspänning. K är noll om man inte avsiktligt adderat en likspänning till växelspänningen över kapacitansen. Därmed har vi för induktansen visat att spänningen ligger 90° före strömmen och för kapacitansen att spänningen ligger 90° efter strömmen. Detta illustreras av tidsdiagrammen nedan:



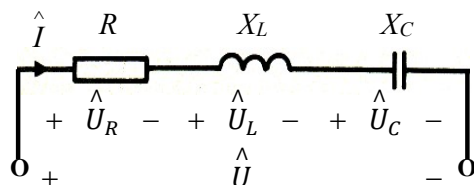
Figur 2.10 Spänningen över en godtycklig induktans ritad i samma tidsdiagram som strömmen.



Figur 2.11 Spänningen över en godtycklig kapacitans ritad i samma tidsdiagram som strömmen.

2.6 Impedans

Totala motståndet i en växelströmskrets kallas *impedans* och brukar betecknas Z . Impedansen varierar med frekvensen och kan sägas vara en form av sammanvägning mellan resistans och reaktans. Enheten för impedans är ohm, precis som för resistans och reaktans. Låt oss bekanta oss med begreppet genom att studera seriekretsen i figur 2.12.



Figur 2.12 En seriekrets bestående av resistans samt induktiv och kapacitiv reaktans.

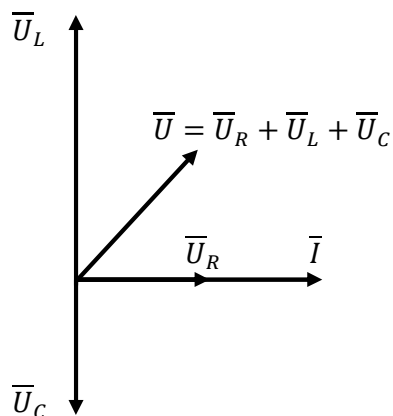
Kretsen matas med en spänning vars toppvärde är \hat{U} . Strömmen genom de tre seriekopplade komponenterna är densamma. Med hjälp av ohms lag kan spänningarna över dem tecknas

$$\begin{aligned}\hat{U}_R &= R \cdot \hat{I} \\ \hat{U}_L &= X_L \cdot \hat{I} \\ \hat{U}_C &= X_C \cdot \hat{I}\end{aligned}$$

och spänningen som matar hela kretsen

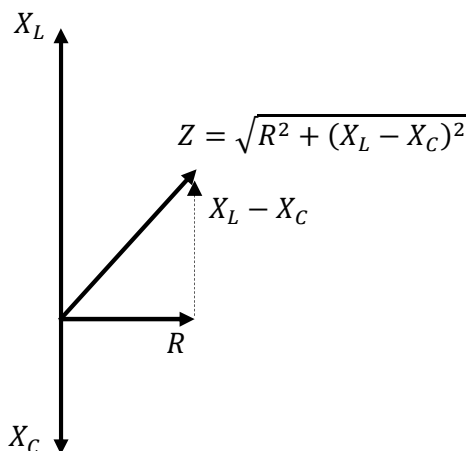
$$\hat{U} = Z \cdot \hat{I}$$

Av resonemanget i avsnitt 2.5 framgår att spänningen över resistorn ligger i fas med strömmen medan spänningarna över induktansen och kapacitansen ligger 90° före respektive efter. Om strömmen tas som *riktfas*, dvs. om den används som referens och representeras av en vektor \bar{I} med riktningen 0° , så kommer visardiagrammet för kretsen i figur 2.12 att få följande utseende:



Figur 2.13 Visardiagram för strömmen och spänningarna i figur 2.12.

Längden på vektorerna i figur 2.13 är påhittade men visardiagrammet illustrerar ändå hur strömmen och de olika spänningarna i figur 2.12 förhåller sig till varandra. Lägga märke till att matningsspänningen är lika med vektorsumman av delspänningarna. Addition av växelspanningar sker alltså på samma sätt som addition av mekaniska krafter. Om vi tillämpar ohms lag och dividerar spänningsvektorena med strömstyrkan så får vi ett likformigt diagram där spänningsvisarna ersätts med motståndsvisare.

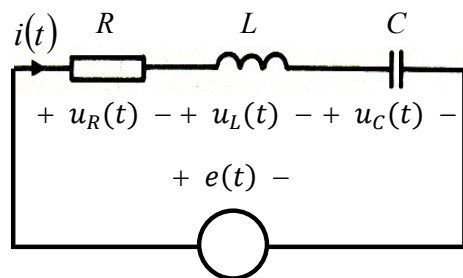


Figur 2.14 Diagrammet visar hur impedansen Z beräknas för kretsen i figur 2.12.

Som framgår av figur 2.14 så beräknas impedansen med hjälp av Pythagoras sats¹⁷. Kretsens totala reaktans X fås genom att subtrahera X_C från X_L . Om $X_C = X_L$ blir totala reaktansen noll. Fenomenet kallas *resonans* och medför att matningsspänningen kommer att ligga i fas med strömmen.

Exempel 2.2:

En resistor, induktans och kapacitans är seriekopplade och anslutna till en spänningskälla $e(t)$ enligt schemat nedan. Bestäm $i(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$ och $u_C(t)$.



$$R = 1,0 \text{ k}\Omega$$

$$L = 2,0 \text{ H}$$

$$C = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$$

$$e(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t + 0^\circ) \text{ V}$$

Lösning:

Beräkna först strömmens toppvärde $\hat{I} = \frac{\hat{E}}{Z}$ där $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

Av det givna tidsuttrycket för $e(t)$ framgår att $\hat{E} = 10\sqrt{2} \text{ V}$ och $\omega = 1000 \text{ radianer/s}$

¹⁷ Pythagoras (cirka 570-497 f.Kr.), grekisk filosof och matematiker.

Reaktanserna beräknas enligt:

$$X_L = \omega L \Rightarrow X_L = 1000 \cdot 2,0 = 2,0 \text{ k}\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \Rightarrow X_C = \frac{1}{1000 \cdot 1,0 \cdot 10^{-6}} = 1,0 \text{ k}\Omega$$

Strömmens toppvärde blir alltså:

$$\hat{I} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{1000^2 + (2000 - 1000)^2}} \text{ A} = 10 \text{ mA}$$

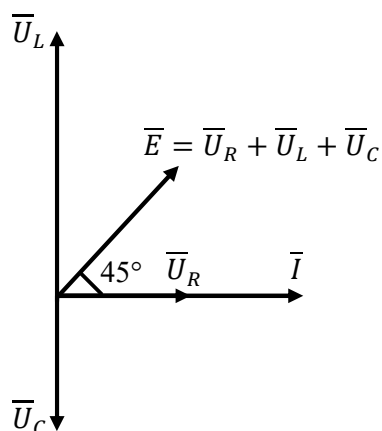
Med hjälp av ohms lag kan toppvärdet för de tre sökta spänningarna beräknas:

$$\hat{U}_R = R \cdot \hat{I} \Rightarrow \hat{U}_R = 1000 \cdot 0,010 = 10 \text{ V}$$

$$\hat{U}_L = X_L \cdot \hat{I} \Rightarrow \hat{U}_L = 2000 \cdot 0,010 = 20 \text{ V}$$

$$\hat{U}_C = X_C \cdot \hat{I} \Rightarrow \hat{U}_C = 1000 \cdot 0,010 = 10 \text{ V}$$

För att kunna teckna tidsuttrycken för strömmen och de tre spänningarna måste först ett visardiagram ritas, skalenligt. Låt exempelvis 10 V toppvärde motsvara 2 cm och 10 mA toppvärde på strömmen 4 cm. När det gäller strömmen i det här fallet, är det inte så noga. Vi har bara en ström att hålla reda på i kretsen. Om strömmen tas som riktfas får man följande visardiagram:



Men nu måste vi kolla upp om verkligen visardiagrammet stämmer? \bar{E} -vektorn ovan skall jämföras med det givna tidsuttrycket för $e(t)$. Då framgår det att fasvinkeln för $e(t)$ är 0° vilket innebär att visardiagrammet ovan måste vridas 45° medurs. Fasvinklarna blir -45° , -45° , $+45^\circ$ och -135° för respektive $i(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$ och $u_C(t)$. Därmed har vi all information som behövs för att kunna teckna tidsuttrycken:

$$i(t) = 10 \sin(1000t - 45^\circ) \text{ mA}$$

$$u_R(t) = 10 \sin(1000t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 20 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 10 \sin(1000t - 135^\circ) \text{ V}$$

Lägg märke till att vinkelfrekvensen är densamma som hos matningsspänningen $e(t)$.

Svar: De sökta tidsuttrycken är

$$\begin{aligned} i(t) &= 10 \sin(1000t - 45^\circ) \text{ mA} \\ u_R(t) &= 10 \sin(1000t - 45^\circ) \text{ V} \\ u_L(t) &= 20 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ V} \\ u_C(t) &= 10 \sin(1000t - 135^\circ) \text{ V} \end{aligned}$$

2.7 Komplexa metoden ($j\omega$ -metoden)

Komplexa metoden är en metod som bygger på att komplexa tal används vid lösande av växelströmsproblem. Metoden kallas även *$j\omega$ -metoden* eftersom just produkten mellan j och ω är vanligt förekommande i de uttryck som man får upp vid beräkningsarbetet. Inom matematiken används bokstaven i för att beteckna $\sqrt{-1}$ medan man inom elektrotekniken tvingas använda j istället, eftersom i redan är upptaget och används för att beteckna växelström.

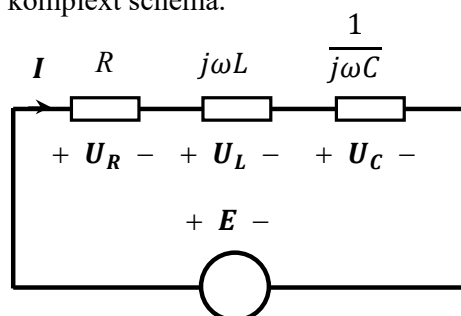
Finessen med $j\omega$ -metoden är att man kan återgå till att använda likströmslärans enkla lagar. Enda skillnaden är att räknearbetet utförs med användande av komplexa tal där man automatiskt får ut amplituder och fasvinklar utan att behöva använda sig av krångliga och tidsödande vektorbetraktelser. Detta blir möjligt om alla tidsuttryck för spänningar och strömmar transformeras om till komplexa tal. De komplexa talens belopp motsvarar amplituderna (toppvärdena) och argumenten fasvinklarna i tidsuttrycken. För en generell sinusformad ström $i(t) = \hat{I} \sin(\omega t + \varphi)$ blir alltså enligt $j\omega$ -metoden den matematiska transformen $\mathbf{I} = \hat{I} \cdot e^{j\varphi}$. Lägg märke till att den komplexa strömmen anges med **fet** bokstav för att skilja den från effektivvärde. Transformen för en generell sinusformad spänning erhålls på motsvarande sätt. Vidare måste alla reaktanser som ingår i den aktuella kretsen ändra skepnad. Den induktiva reaktansen i en spole uttrycks som $j\omega L$ och den kapacitiva reaktansen för en kondensator som $\frac{1}{j\omega C}$ eller $-\frac{j}{\omega C}$ eftersom $\frac{1}{j} = -j$. Resistanser ändrar inte skepnad överhuvudtaget utan uttrycks fortfarande bara som R .

Exempel 2.3:

Bestäm $i(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$ och $u_C(t)$ i föregående exempel genom att använda $j\omega$ -metoden.

Lösning:

Rita först ett s.k. komplext schema:



$$\text{Ohms lag} \Rightarrow \mathbf{I} = \frac{\mathbf{E}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\text{Spänningens tidsuttryck } e(t) = 10\sqrt{2} \sin(1000t + 0^\circ) \text{ V}$$

$$\text{transformeras till komplex spänning } \mathbf{E} = 10\sqrt{2} \cdot e^{j0^\circ} \text{ V}$$

$$\Rightarrow \mathbf{I} = \frac{10\sqrt{2} \cdot e^{j0^\circ}}{1000 + j1000 \cdot 2,0 + \frac{1}{j1 \cdot 1,0 \cdot 10^{-6}}} = \frac{10\sqrt{2} \cdot e^{j0^\circ}}{1000 + j2000 - j1000} = \frac{10\sqrt{2} \cdot e^{j0^\circ}}{1000 + j1000} \text{ A}$$

$$\text{Allmänt gäller för komplexa tal att } X + jY = \sqrt{X^2 + Y^2} \cdot e^{j \arctan \frac{Y}{X}}.$$

$$\text{Alltså } \mathbf{I} = \frac{10\sqrt{2} \cdot e^{j0^\circ}}{\sqrt{1000^2 + 1000^2} \cdot e^{j \arctan \frac{1000}{1000}}} = \frac{10\sqrt{2} \cdot e^{j0^\circ}}{1000\sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ}} = 10 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ mA}$$

Komplexa strömmen \mathbf{I} ovan inverstransformeras till $i(t) = 10 \sin(1000t - 45^\circ)$ mA varvid strömmens tidsuttryck blir exakt detsamma som i föregående exempel. De sökta spänningarna kommer också bli desamma. Spänningarna kan beräknas med ohms lag:

$$\mathbf{U}_R = R \cdot \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{U}_R = 1000 \cdot 0,010 \cdot e^{-j45^\circ} = 10 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ V}$$

$$\text{Inverstransformering} \Rightarrow u_R(t) = 10 \sin(1000t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$\mathbf{U}_L = j\omega L \cdot \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{U}_L = j1000 \cdot 2,0 \cdot 0,010 \cdot e^{-j45^\circ} = 20 \cdot e^{j90^\circ} \cdot e^{-j45^\circ} = 20 \cdot e^{j45^\circ} \text{ V}$$

$$\text{Inverstransformering} \Rightarrow u_L(t) = 20 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$\mathbf{U}_C = \frac{1}{j\omega C} \cdot \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{U}_C = -j \frac{1}{1000 \cdot 1,0 \cdot 10^{-6}} \cdot 0,010 \cdot e^{-j45^\circ} = 10 \cdot e^{-j90^\circ} \cdot e^{-j45^\circ} = 10 \cdot e^{-j135^\circ} \text{ V}$$

$$\text{Inverstransformering} \Rightarrow u_C(t) = 10 \sin(1000t - 135^\circ) \text{ V}$$

Svar: De sökta tidsuttrycken är

$$i(t) = 10 \sin(1000t - 45^\circ) \text{ mA}$$

$$u_R(t) = 10 \sin(1000t - 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_L(t) = 20 \sin(1000t + 45^\circ) \text{ V}$$

$$u_C(t) = 10 \sin(1000t - 135^\circ) \text{ V}$$